Wiskunde – Semester 2
Theorie

Hoofdstuk 1
Getallenrijen

Bewijzen: *pag. 3 + 5 + 10 + 11*

1.1 Getallenrijen

Getallenrij	Een geordende (oneindige) verzameling van getallen. *Notatie*: $\{u_n\}$ staat voor $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ u_n = de algemene term van de getallenrij (vaak in de vorm van een 'formule')
Constante getallenrij	Wanneer de algemene term een constante is (bijv. $u_n = 5$)
Partieelsom	De *n*-de partieelsom van een getallenrij is de som van de eerste *n* elementen van een getallenrij. *Notatie*: $S_n = \sum_{i=1}^{n}(u_i) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
Reekssom	De limiet voor n gaande naar +∞ van de n-de partieelsom. *Notatie*: $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty}(u_i) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

1.2 Speciale getallenrijen

Partieelsom constante g.r.	$S_n = n \cdot u_1$
Rekenkundige getallenrij	Het *verschil* tussen opeenvolgende elementen van de rij = constant *d* = notatie voor dit verschil (kan ook negatief getal zijn!) *Algemene term*: $u_n = u_1 + (n-1)d$ indien d = 0 → constante g.r.
Partieelsom rekenkundige rij	$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ + zie bewijs p. 3
Meetkundige getallenrij	De *verhouding* tussen opeenvolgende elementen van de rij = constant q = notatie voor deze verhouding = de rede (kan ook breuk zijn!) *Algemene term*: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ indien q = 1 → constante g.r
Partieelsom meetkundige rij	$S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ + zie bewijs p. 5
Hyperharmonische getallenrij	Elk element van de rij is een vaste negatieve macht van de index. *Algemene term*: $u_n = n^{-p} = \frac{1}{n^p}$ $, met\ p > 0$

1.3 Annuïteiten

Basisbegrippen	A = startkapitaal r = jaarlijkse interestvoet
Enkelvoudige interest	Na een periode van *n* jaar is het kapitaal aangegroeid tot de eindwaarde: $S = A \cdot (1 + n \cdot r)$ (alleen het startkapitaal brengt winst op)
Samengestelde interest	Na een periode van *n* jaar is het kapitaal aangegroeid tot de eindwaarde: $S = A \cdot (1 + r)^n$ (ook de uitgekeerde interest brengt winst op, naast het startkapitaal) ⇨ maken wij steeds gebruik van
Kapitalisatie	Eindbedrag wanneer je *A* gedurende *n* jaar belegt aan een jaarlijkse *r*: $S = A \cdot (1 + r)^n = A \cdot u^n$ = *gekapitaliseerde bedrag*

	$u = 1 + r$ = *kapitalisatiefactor* Merk up: u > 1 voor positieve interestvoeten
Actualisatie	<u>Startkapitaal</u> om na een belegging gedurende n jaar aan een jaarlijkse r een eindbedrag S te bereiken: $A = S \cdot (1 + r)^{-n} = S \cdot v^n$= *geactualiseerde bedrag* $v = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{u}$ = actualisatiefactor Merk op: v < 1 voor positieve interestvoeten
Annuïteit	Een serie gelijkblijvende betalingen op vaste tijdstippen. (bijv. om te bereken hoe je een schuld of geleend bedrag kan aflossen in periodieke betalingen tegen een bepaalde interestvoet) R = de gelijke jaarlijkse betalingen (telkens op het einde van de periode) *r* = jaarlijkse interestvoet & *n* = aantal betalingen
Slotwaarde / eindwaarde	De waarde van alle betalingen samen op het einde van de laatste periode. $S = R \cdot \frac{u^n - 1}{r}, met\ u = 1 + r$ + zie bewijs p. 10 (belangrijk!)
Aanvangswaarde / beginwaarde	De waarde van alle betalen samen bij het begin van de eerste periode. $A = R \cdot \frac{1 - v^n}{r}, met\ v = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 + r}$ + zie bewijs p. 11 (belangrijk!)
Aanvangswaarde versus slotwaarde	Altijd geldt: $S = A \cdot u^n$ (de slotwaarde is het gekapitaliseerde bedrag van de aanvangswaarde) $A = S \cdot v^n$ (de aanvangswaarde is het geactualiseerde bedrag van de slotwaarde) Verder geldt steeds: $A < n \cdot R < S$

Hoofdstuk 2
Taylor- en MacLaurinbenaderingen

Bestudeer voor dit hoofdstuk ook de afgeleiden uit boek 1.

2.1 Functies van één veranderlijke

MacLaurinontwikkeling (= oneindige som)	Als alle afleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan voor x = 0 dan geldt $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ $of\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ Voor x in de omgeving van 0 $f^{(0)}(x) = f(x)$
Taylorontwikkeling (= oneindige som)	Als alle afleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan voor x = x_0 dan geldt $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$ $of\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ Voor x in de omgeving van x_0
Benaderingen	Wanneer je een Taylor- of MacLaurinontwikkeling van een functie afbreekt na een aantal termen, krijg je een benadering van deze functie.
MacLaurinbenadering (= eindige som)	Als de eerste *n* afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan voor x = 0 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ $of\ f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$
Taylorbenadering (= eindige som)	Als de eerste *n* afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan voor x = x_0 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ $of\ f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
Opmerkingen	○ n = 1 → lineair benadering (boek 1) ○ n = 2 → kwadratische benadering ○ n = 3 → kubische benadering Benadering beter als: ○ Hogere orde (hoe meer termen je meeneemt) ○ *MacLaurinbenadering*: naarmate de waarde x dichter bij 0 ligt *Taylorbenadering*: naarmate de waarde x dichter bij x_0 ligt

2.2 Functies van twee veranderlijken

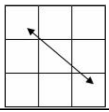
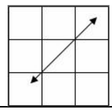
MacLaurinbenadering van orde 1	Als de eerste orde partiële afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan en continu zijn voor (x, y) = (0,0), dan kan de functiewaarde voor een waarde van (x, y) in de buurt van (0,0) benaderd worden als $f(x,y) \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$

MacLaurinbenadering van orde 2	Als de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan en continu zijn voor (x, y) = (0,0), dan kan de functiewaarde voor een waarde van (x, y) in de buurt van (0,0) benaderd worden als $$f(x,y) \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]$$
Taylorbenadering van orde 1	Als de eerste orde partiële afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan en continu zijn voor (x, y) = (x_0, y_0), dan kan de functiewaarde voor een waarde van (x, y) in de buurt van (x_0, y_0) benaderd worden als $$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
Taylorbenadering van orde 2	Als de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van een functie f: ℝ → ℝ bestaan en continu zijn voor (x, y) = (x_0, y_0), dan kan de functiewaarde voor een waarde van (x, y) in de buurt van (x_0, y_0) benaderd worden als $$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

Hoofdstuk 3
Matrices

Bewijzen: *pag. 32 + 34 + 35 + 37 + 38 + 39*

3.1 Definities

Matrix	Een matrix van orde m x n ($m,n \in \mathbb{N}_0$) is een blok reële waarden met: m rijen en n kolommen. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Element a_{ij} bevindt zich in rij i en kolom j i = *rij-index* en j = *kolomindex*
Vierkante matrix	Heeft evenveel rijen als kolommen. De orde is n x n ($n \in \mathbb{N}_0$) → matrix heeft orde n / is van n -de orde (een matrix van orde 1 x 1 is een getal)
Hoofddiagonaal	De elementen van een vierkante matrix waarbij rij- en kolomindex aan elkaar gelijk zijn, dus de elementen a_{ii} met $1 \leq i \leq n$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 
Nevendiagonaal	De elementen van een vierkante matrix $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$, dus de elementen $a_{i,n+1-i}$ met $1 \leq i \leq n$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 
Spoor	De som van de hoofddiagonaalelementen (van een vierkante matrix)
Kolommatrix **= kolom** **= kolomvector**	Een matrix met orde m x 1 ($m \in \mathbb{N}_0$) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ *nulkolom = nulvector = kolom met allemaal nullen*
Rijmatrix **= rij = rijvector**	Een matrix met orde 1 x n ($n \in \mathbb{N}_0$) $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$
Diagonaalmatrix	Een vierkante n x n matrix waarin al de elementen die niet op de hoofddiagonaal staan, gelijk zijn aan nul. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Scalaire matrix	Een diagonaalmatrix waarin alle hoofddiagonaalelementen gelijk zijn aan een zelfde getal a $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$
Eenheidsmatrix	I_n → Een scalaire matrix waarbij a = 1
Nulmatrix	O_n → Een scalaire matrix waarbij a = 0, ofwel een m x n matrix met allemaal nullen

Triangulaire matrix / driehoeksmatrix	Een matrix waarbij alle elementen aan eenzelfde kant van de hoofddiagonaal nul zijn.
***Onder*triangulaire matrix / *beneden*driehoeksmatrix**	Alle elementen <u>boven</u> de hoofddiagonaal zijn nul. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $a_{ij} = 0$ als $i < j$
***Boven*triangulaire matrix / *boven*driehoeksmatrix**	Alle elementen <u>onder</u> de hoofddiagonaal zijn nul. $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$ $a_{ij} = 0$ als $i > j$

3.2 Bewerkingen

Gelijkheid (definitie)	Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn gelijk als 1) Deze matrices <u>dezelfde orde</u> hebben 2) Alle <u>gelijkstandige elementen aan elkaar gelijk</u> zijn: $\forall i, \forall j : \ a_{ij} = b_{ij}$
Product van een matrix met een getal	Een matrix $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$ vermenigvuldigen met een reëel getal α = elk element van de matrix met dat getal vermenigvuldigen *De orde blijft onveranderd.* $$\alpha \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Tegenstelde matrix –A*: deze bekom je voor $\alpha = -1$ $$-\mathbf{A} = (-1) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$
Som en verschil van twee matrices	Twee matrices <u>van dezelfde orde</u> kunnen bij elkaar opgeteld (resp. van elkaar afgetrokken) worden door <u>alle gelijkstandige elementen bij elkaar op te tellen</u> (resp. van elkaar af te trekken) $$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \ \Leftrightarrow \forall i, \forall j : \ a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$ $$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \ \Leftrightarrow \forall i, \forall j : \ a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$
Commutatieve optelling	De optelling van matrices is commutatief (= verwisselbaar) $$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$ *VW1*: orde van A+B = orde van B+A (definitie $^{\mathrm{v}}/_{\mathrm{d}}$ som) *VW2*: Element op rij i en kolom j → $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$
Kenmerken	Voor twee reële getallen α en β en twee matrices A en B van dezelfde orde: $\alpha \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \alpha \cdot \boldsymbol{B}$ $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{A} = \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \beta \cdot \boldsymbol{A}$ $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{A}) = \beta \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{A}) = \alpha \cdot \beta \cdot \boldsymbol{A}$ *+ bewijzen kennen (m.b.v. definitie gelijkheid)*
Product van twee matrices	Een matrix van orde m x k en een matrix van orde k x n kunnen met elkaar vermenigvuldigd worden als volgt: $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \ \Leftrightarrow \ c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}, \qquad met\ 1\ \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$$ De matrix C heeft orde m x n. ⇨ Het element c_{ij} vind je door de i-de rij van de matrix A te vermenigvuldigen met de j–de kolom van de matrix B.

	Let op: de vermenigvuldiging van matrices is niet commutatief In het algemeen geldt dat $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$
Speciale producten	▪ Een uitvoerbaar product van een rij met een matrix = terug een rij $1\ x\ k \cdot k\ x\ n = 1\ x\ n$ ▪ Een uitvoerbaar product van een matrix met een kolom = terug een kolom $m\ x\ k \cdot k\ x\ 1 = m\ x\ 1$ ▪ Een uitvoerbaar product van een rij met een kolom = een getal $1\ x\ k \cdot k\ x\ 1 = 1\ x\ 1$ ▪ Een product van een kolom met een rij = een matrix (lukt altijd!) $m\ x\ 1 \cdot 1\ x\ n = m\ x\ n$
Macht van een matrix	De k-de macht van een vierkante matrix A wordt gedefinieerd als $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}$ Let op: dus niet gewoon dat kwadraat bij elk element zetten (behalve bij diagonaal matrix)
Macht van een *diagonaal*matrix	De k-de macht van een diagonaalmatrix is opnieuw de diagonaalmatrix met als hoofddiagonaalelementen de k-de macht van de originele hoofddiagonaalelementen

Het is niet zo dat alle rekenregels die gelden voor reële getallen, ook zullen gelden voor matrices (want matrixvermenigvuldiging is niet-commutatief)

3.3 Eigenschappen

Associatieve optelling	Het optellen van matrices is associatief: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ *Let op: de volgorde blijft dus wel gelijk!*
Associatieve vermenigvuldiging	Het vermenigvuldigen van matrices is associatief: $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ *Let op: de volgorde blijft dus wel gelijk!*
Distributiviteit	Het vermenigvuldigen van matrices is distributief t.o.v. de optelling: *Linkse distributiviteit*: $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ *Rechtse distributiviteit*: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$
Vermenigvuldigen met nulmatrix of eenheidsmatrix	Vermenigvuldigen met de *nulmatrix* geeft de *nul*matrix: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{A}$ Vermenigvuldigen met de *eenheidsmatrix* geeft de *originele* matrix: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$
Nuldelers	Men noemt twee vermenigvuldigbare matrices A en B nuldelers indien geldt: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{met\ A \neq O\ en\ B \neq O}$ *Dus uit een uitdrukking $A \cdot B = O$ kan je niet besluiten dat A = O of B = O*
Beide leden voor- of navermenigvuldigen	Uit de gelijkheid $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ volgt dat een gelijkheid behouden blijft indien: $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$ je beide leden linksvermenigvuldigt met C $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ je beide leden rechtsvermenigvuldigt met C *Let op: het is belangrijk dat je beide leden van een gelijkheid aan dezelfde zijde vermenigvuldigt!* Uit $A = B$ volgt niet noodzakelijk dat $C \cdot A = B \cdot C$ of dat $A \cdot C = C \cdot B$
Rekenen met matrices	Wat NIET geldt $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \not\Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$

	Wat WEL geldt $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \nRightarrow \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{0}$$ *(A en B-C kunnen nuldelers zijn → B – C kan ≠ 0 zijn)* $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=\ \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2$$

3.4 Transponeren

Transponeren	De <u>getransponeerde matrix</u> van een matrix van orde m x n is een matrix van orde n x m die bestaat uit de elementen van de oorspronkelijke matrix waarbij *rijen en kolommen* werden *omgewisseld*. *Notatie*: $\boldsymbol{A}'$ of $\boldsymbol{A}^T$
Getransponeerde v/e getransponeerde	$(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$ *(bewijs steunt op de gelijkheid van twee matrices)*
Getransponeerde v/e veelvoud	$(\alpha\cdot\boldsymbol{A})^T=\alpha\cdot\boldsymbol{A}^T$ *(bewijs steunt op de gelijkheid van twee matrices)*
Getransponeerde v/e som	Voor matrices **A** en **B** van gelijke orde geldt: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\ \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$ *(bewijs steunt op de gelijkheid van twee matrices)*
Getransponeerde v/e som	Voor vermenigvuldigbare matrices **A** en **B** geldt: $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T=\ \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$ *(bewijs steunt op de gelijkheid van twee matrices)*

Hoofdstuk 4
Determinanten

Bewijzen: *pag. 47 + 53 + BB*

4.1 Definitie

Determinant	Associeert een getal met elke vierkante matrix
Determinant van matrix v. orde *1* x *1*	De determinant van een vierkante matrix $\boldsymbol{A} = (a_{11})$ van orde *1* x *1* is: $\det \mathbf{A} = \lvert\mathbf{A}\rvert = a_{11}$
Determinant van matrix v. orde *2* x *2*	De determinant van een vierkante matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ van orde *2* x *2* is: $\det \mathbf{A} = \lvert\mathbf{A}\rvert = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ *ofwel: product hoofddiagonaal – product nevendiagonaal*
Regel van Sarrus (matrix v. orde *3* x *3*)	De determinant $^{v}/_{e}$ vierkante matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ van orde *3* x *3* is: $\det \mathbf{A} = \lvert\mathbf{A}\rvert = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ $-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ *Ofwel: de som van de producten $^{v}/_{d}$ elementen op de "positieve" diagonalen worden verminderd met de som van de producten $^{v}/_{d}$ elementen op de "negatieve" diagonalen.* $\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$
Minor	Een matrix $\mathbf{A}$ van orde *n* x *n* en een element a_{ij} $met\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$ De minor $\mathbf{A}_{ij}$ = de matrix van orde (*n–1*) x (*n–1*) die je verkrijgt door de in de matrix $\mathbf{A}$ de *i*-de rij en de *j*-de kolom weg te schrappen. $M_{32} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{23} & M_{24} \\ M_{41} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$
Cofactor	Een matrix $\mathbf{A}$ van orde *n* x *n* en een element a_{ij} $met\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$ De cofactor c_{ij} = de determinant $^{v}/_{d}$ minor indien de som van rij- en kolomindex even is & de negatieve determinant $^{v}/_{d}$ minor indien deze som oneven is. $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$

Ontwikkelingsmethode (matrix v. orde > 3 x 3)	Kies een willekeurige rij i of kolom j $(met\ 1\ \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n)$ De determinant van een vierkante matrix $\mathbf{A}$ van orde n x n kan berekend worden door te ontwikkelen naar de i-de rij: $$\det \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| = a_{i1} \cdot c_{i1} + a_{i2} \cdot c_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot c_{in} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot c_{i\ell}$$ of naar de j-de kolom: $$\det \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| = a_{1j} \cdot c_{1j} + a_{2j} \cdot c_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot c_{nj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} \cdot c_{\ell j}$$ ⇨ *We zullen steeds verkiezen te ontwikkelen naar een rij of naar een kolom met zoveel mogelijk nullen in (= minder rekenwerk)*
Determinant $^{v}/_{d}$ getransponeerde	De determinant $^{v}/_{e}$ vierkante matrix is gelijk aan de determinant $^{v}/_{d}$ getransponeerde van die matrix: $\det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right) = \det\left(\mathbf{A}\right)$
Reguliere & singuliere matrices	<u>Reguliere</u> vierkant matrix ⤇ determinant ≠ 0 <u>Singuliere</u> vierkante matrix ⤇ determinant = 0

4.2 Eigenschappen

(we gaan steeds uit van een vierkante matrix, zodat de determinant berekend kan worden)

Determinant van matrix met nulrij	De determinant van een matrix met minstens één nulrij of minstens één nulkolom is gelijk aan 0.
Determinant van driehoeksmatrix	De determinant $^{v}/_{e}$ driehoeksmatrix = product $^{v}/_{d}$ hoofddiagonaalelementen. ⇨ Bijgevolg geldt: determinant $^{v}/_{e}$ diagonaalmatrix = product van de hoofddiagonaalelementen ⇨ & determinant $^{v}/_{d}$ eenheidsmatrix = 1 $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ **&** $det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
Twee rijen/kolommen wisselen	De determinant van een matrix *verandert van teken* wanneer twee rijen of twee kolommen omgewisseld worden.
Twee gelijke rijen/kolommen	De determinant van een matrix met twee gelijke rijen of twee gelijke kolommen is *gelijk aan nul*.
***Rij of kolom* vermenigvuldigen met een reëel getal**	Wanneer men in een matrix een rij of kolom vermenigvuldigt met een reëel getal, dan wordt ook de determinant vermenigvuldigt met dit reëel getal. $$det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{12} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \cdot det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ *(deze eigenschap kun je bv. gebruiken als er veel breuken in een bepaalde rij/kolom staan) + zie bewijs op BB*
***Matrix* vermenigvuldigen met een reëel getal**	Wanneer men in een n x n matrix alle elementen vermenigvuldigt met een reëel getal α, dan wordt de determinant vermenigvuldigd met α^{n}. $$det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{11} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{12} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{13} \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{21} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{22} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{23} \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{31} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{32} & \boldsymbol{\alpha} \cdot a_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}} \cdot det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ *Tip voor handig gebruik:* $det(-\mathbf{A}) = (-1)^{n} \cdot det(\mathbf{A}) = ..$ *Als n = even:* $det(-\mathbf{A}) = det(\mathbf{A})$ *Als n = oneven:* $det(-\mathbf{A}) = -\,det(\mathbf{A})$
Algemeen geldig	In het algemeen geldt dat: $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det\left(\mathbf{B}\right)$

Determinant opsplitsen volgens rij of kolom	Wanneer in een matrix een rij gelijk is aan de som van twee rijen, dan kan de determinant opgesplitst worden volgens die rij. *(analoge werkwijze voor een kolom)* Beschouw matrix $\mathbf{A}$ waarin de i-de rij te schrijven is als de som van twee rijen: $$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n) + (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$$ Dan geldt: $$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ *(deze eigenschap kun je bv. gebruiken om een matrix te vereenvoudigen)* *+ zie bewijs op BB*
Bij een rij/kolom een veelvoud van een andere rij/kolom optellen	De determinant van een matrix wijzigt niet wanneer men bij een rij een veelvoud van een andere rij optelt (hetzelfde geldt voor een kolom). $$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha \cdot a_{j1} & a_{i2} + \alpha \cdot a_{j2} & \cdots & a_{in} + \alpha \cdot a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ *Tip voor handig gebruik: om de te ontwikkelen matrix te vereenvoudigen.*
Determinant van een product	De determinant van een product van twee matrices is gelijk aan het product van de afzonderlijke determinanten. $$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$ Merk op dat in het algemeen $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$ *Let op: dit geldt niet voor de som A + B!*

Tip: gebruik de eigenschappen van determinanten om zoveel mogelijk nullen te creëren in de te-ontwikkelen-matrix
(voornamelijk "bij een rij/kolom een veelvoud van een andere rij/kolom optellen")

Hoofdstuk 5
Kwadratische vormen

5.1 Symmetrische matrices

Symmetrische matrix	Een vierkante matrix die gelijk is aan zijn getransponeerde: $$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$ De driehoeken boven en onder de hoofddiagonaal zijn elkaars spiegelbeeld. *Het element op rij i en kolom j is gelijk aan het element op rij j en kolom i.*
Eigenschap	Voor een willekeurige m x n matrix $\mathbf{A}$ geldt dat $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ steeds symmetrisch is en dat $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}$ steeds symmetrisch is. Dus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ en $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A})^{\mathrm{T}}$

5.2 Definitie matrices

(je gaat hier uit van symmetrische matrices)

Definiete matrix	Voor een symmetrische matrix $\mathbf{A}$ van orde n x n & elke kolom $x \neq 0$ geldt: Positief definiet: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0$ Negatief definiet: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} < 0$ Non-definiet: indien $\mathbf{A}$ niet positief definiet en niet negatief definiet is *(elke kolom $x \neq 0$ met n elementen)*
Kwadratische vorm	$\mathrm{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ $q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n \end{pmatrix}$ $= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$ *Kwaadraattermen*: de termen x_i^2 *Producttermen*: de termen x_ix_j $(i \neq j)$ Hoofddiagonaalelementen van $\mathbf{A}$ ⤇ de *coëfficiënten $^v/_d$ kwadraattermen* Andere elementen van $\mathbf{A}$ ⤇ de *halve coëfficiënten $^v/_d$ producttermen* (optellen)
Definiete matrices van orde *2* x *2*	Een symmetrische matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ is Positief definiet: indien $\boldsymbol{a} > 0$ en $\det(\mathbf{A}) > 0$ Negatief definiet: indien $\boldsymbol{a} < 0$ en $\det(\mathbf{A}) > 0$ Non-definiet: in alle andere gevallen
Definiete matrices van orde *3* x *3*	Een symmetrische matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ is Positief definiet: indien $\boldsymbol{a} > 0$ *en* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} > 0$ *en* $\det(\mathbf{A}) > 0$ Negatief definiet: indien $\boldsymbol{a} < 0$ *en* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} > 0$ *en* $\det(\mathbf{A}) < 0$ Non-definiet: in alle andere gevallen

Hoofdstuk 6
Afleiden van en naar matrices – Hessiaanse matrix

6.1 Afleiden van een matrix

Als de m x n-matrix $\mathbf{A}$ afleidbare functies bevat met als onafhankelijke veranderlijke t, dan wordt de afgeleide van $\mathbf{A}$ naar t gedefinieerde als de m x n-matrix bestaande uit alle afgeleide functies :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{12}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{1n}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{22}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{2n}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{mn}(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

6.2 Afleiden van een functie naar een matrix

Afgeleide van een functie naar een kolom	*We bekomen een kolom met daarin alle eerste orde partiële afgeleiden van de functie f ⇛ gradiënt van f* Als $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ een partieel afleidbare functie is van n onafhankelijke veranderlijken x_i, dan definieert men $$\text{de afgeleide van y naar de kolom } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; als \; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
Afgeleide van een functie naar een rij	*We bekomen een rij met daarin alle eerste orde partiële afgeleiden $^v/_d$ functie f* Als $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ een partieel afleidbare functie is van n onafhankelijke veranderlijken x_i, dan definieert men $$\text{de afgeleide van y naar de rij } \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$ $$als \; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
Eigenschap (van de afgeleiden van een functie een rij/kolom)	De afgeleide van een functie $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ naar een kolom $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ is de getransponeerde van de afgeleide van de functie naar de rij $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$.
Afgeleide van een functie naar een matrix	*We bekomen een matrix met daarin alle eerste orde partiële afgeleiden $^v/_d$ functie f.* Als $y = f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ een partieel afleidbare functie is van m x n onafhankelijke veranderlijken x_{ij}, dan definieert men $$\text{de afgeleide van y naar de matrix } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \; als$$

	$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}$$

6.3 Afleiden van een rij naar een kolom / afgeleide van een kolom naar een rij

(nooit rij naar rij of kolom naar kolom)

Beschouw m partieel afleidbare functies $f_1, \dots, f_m$. Elke functie f_j (met $1 \le j \le m$) is een functie van n onafhankelijke veranderlijken $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f_j: (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Afgeleide van een rij naar een kolom **(rij met functies wordt afgeleid naar een kolom met daarin de onafhankelijke veranderlijken)**	*We bekomen een n x m-matrix met alle eerste orde partiële afgeleiden van de functies f_j. Het element op plaats (i,j) is de partiële afgeleide van de j-de functie naar de i-de veranderlijke.* Als $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m)$, waarbij de elementen $y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\text{dan definieert men de afgeleide van } \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \text{ naar de kolom } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; als$ $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
Afgeleide van een kolom naar een rij **(kolom met functies wordt afgeleid naar een rij met daarin de onafhankelijke veranderlijken)**	*We bekomen een m x n-matrix met alle eerste orde partiële afgeleiden van de functies f_j. Het element op plaats (j,i) is de partiële afgeleide van de j-de functie naar de i-de veranderlijke.* = Jacobiaanse matrix van $f_1, \dots, f_m$ Als $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, waarbij de elementen $y_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\text{definieert men de afgeleide van } \mathbf{y} \text{ naar de rij } \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \; als$ $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
Eigenschap	De afgeleide van een rij $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ naar een kolom $\mathbf{x}$ is de getransponeerde van de afgeleide van de kolom $\mathbf{y}$ naar de rij $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$.

6.4 Hessiaanse matrix

Voor een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y = f: (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *geldt*

Hessiaan / Hessiaanse matrix = de tweede afgeleide van de functie f naar de kolom $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$H_f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Of:

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_1, \dots, x_n) & f''_{12}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & f''_{1n}(x_1, \dots, x_n) \\ f''_{21}(x_1, \dots, x_n) & f''_{22}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & f''_{2n}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x_1, \dots, x_n) & f''_{n2}(x_1, \dots, x_n) & \cdots & f''_{nn}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

We bekomen de matrix bestaande uit alle partiële afgeleiden van de tweede orde.

Merk op: voor functies met continue partiële afgeleiden zal de Hessiaan altijd een symmetrische matrix zijn.

Hoofdstuk 7
Vrije extrema – Extrema zonder nevenvoorwaarden

Bewijzen: pag. 76

7.1 Vrij extrema – twee veranderlijken

Lokale extrema	Een functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bereikt in het punt (x_0, y_0) een: (indien voor elk punt (x, y) in de buurt van het punt (x_0, y_0) geldt dat) Lokaal maximum: $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ Lokaal minimum: $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$
Lokale extrema – eerste orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kan enkel een lokaal extremum bereiken in het punt (x_0, y_0), als dit punt een stationair of kritisch punt is: $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ ⇨ *Noodzakelijk voorwaarde, maar geen voldoende voorwaarde*
Hessiaan in punt – 2 veranderlijken	Voor een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x, y) \mapsto f: (x, y)$ wordt de Hessiaan of Hessiaanse matrix in een punt (x_0, y_0) gedefinieerd als $H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$
Teken Hessiaan	De Hessiaanse matrix $H_f(x_0, y_0)$ is Positief definiet: indien $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \; en \; \det[H_f(x_0, y_{n0})] > 0$ Negatief definiet: indien $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \; en \; \det[H_f(x_0, y_{n0})] > 0$ Non-definiet: in alle andere gevallen
Lokale extrema – tweede orde voorwaarde	Beschouw een partieel afleidbare functie f met continu partiële afgeleiden en een stationair punt (x_0, y_0) -> Lokaal extremum indien de Hessiaan $H_f(x_0, y_{n0})$ positief of negatief definiet is. Lokaal maximum: $H_f(x_0, y_{n0}) = negatief\ definitet$ Lokaal minimum: $H_f(x_0, y_{n0}) = positief\ definiet$ Zadelpunt: $H_f(x_0, y_{n0}) = non - definiet$
Opmerkingen voor berekeningen	- Mogelijk komt er uit de 1e orde voorwaarde meer dan één stationair punt –> benader deze dan apart via de 2e orde voorwaarde. - Eenmaal je hebt besloten wat een functie bereikt in een stationair punt (x_0, y_0), bereken dan ook de functiewaarde in dit punt door (x_0, y_0) in te vullen in de originele formule.

7.2 Winstmaximalisatie

Beschouw een monopolist die twee goederen produceert:

Hoeveelheden = q_1 en q_2 & Prijzen = p_1 en p_2

Vraagfuncties: $D_1: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+: (p_1, p_2) \mapsto q_1 = D_1(p_1, p_2)$

$D_2: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+: (p_1, p_2) \mapsto q_2 = D_2(p_1, p_2)$

⇨ m.a.w. de hoeveelheden q_1 en q_2 zijn allebei afhankelijk van de prijzen p_1 en p_2.

Winst = het verschil tussen opbrengsten en kosten → 2 manieren om te berekenen.
(uitgedrukt in functie van de geproduceerde hoeveelheden q_1 en q_2 of in functie van de respectievelijke prijzen p_1 en p_2)

Winst uitgedrukt in functie v/d prijzen p_1 en p_2 (ofwel via de vraagfuncties).

$$W(p_1,p_2) = R(p_1,p_2) - K(p_1,p_2), \text{waarbij } R(p_1,p_2) = p_1 \cdot D_1(p_1,p_2) + p_2 \cdot D_2(p_1,p_2)$$

<u>Eerste orde voorwaarde</u>: Zoek de stationaire punten van W, ofwel alle combinaties p_1^0 *en* p_2^0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial p_1}(p_1^0,p_2^0) = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial p_2}(p_1^0,p_2^0) = 0 \end{cases}$$

<u>Tweede orde voorwaarde</u>: Een stationair punt (p_1^0,p_2^0) zal zorgen voor maximale winsten indien:

$$H_W(p_1^0,p_2^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial p_1^2}(p_1^0,p_2^0) & \dfrac{\partial^2 W}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1^0,p_2^0) \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1^0,p_2^0) & \dfrac{\partial^2 W}{\partial p_2^2}(p_1^0,p_2^0) \end{pmatrix} negatief\ definiet\ is$$

Tip: antwoord bij een verhaaltjes opgave met een mooie conclusie zin.

7.3 Vrij extrema – n veranderlijken (erg analoog aan definities en eigenschappen in par 1)

Lokale extrema	Een functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bereikt in het punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ een: (indien voor elk punt $(x_1, \dots, x_n)$ in de buurt van het punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ geldt dat) <u>Lokaal maximum</u>: $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ <u>Lokaal minimum</u>: $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1^0, \dots, x_n^0)$
Lokale extrema – eerste orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan enkel een lokaal extremum bereiken in het punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, als dit punt een <u>stationair</u> of <u>kritisch</u> punt is: $\begin{cases} f_1'(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \\ \vdots \\ f_n'(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \end{cases}$ ⇨ *Noodzakelijk voorwaarde, maar geen voldoende voorwaarde*
Hessiaan in punt – 2 veranderlijken	Voor een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wordt de Hessiaan of Hessiaanse matrix in een punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ gedefinieerd als $H_f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x_1^0, \dots, x_n^0) & f''_{12}(x_1^0, \dots, x_n^0) & \cdots & f''_{1n}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ f''_{21}(x_1^0, \dots, x_n^0) & f''_{22}(x_1^0, \dots, x_n^0) & \cdots & f''_{2n}(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x_1^0, \dots, x_n^0) & f''_{n2}(x_1^0, \dots, x_n^0) & \cdots & f''_{nn}(x_1^0, \dots, x_n^0) \end{pmatrix}$
Lokale extrema – tweede orde voorwaarde	Beschouw een partieel afleidbare functie f met continu partiële afgeleiden en een stationair punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ <u>Lokaal maximum</u>: $H_f(x_1^0, \dots, x_n^0) = negatief\ definitet$ <u>Lokaal minimum</u>: $H_f(x_1^0, \dots, x_n^0) = positief\ definiet$ <u>Geen extrema</u>: $H_f(x_1^0, \dots, x_n^0) = non - definiet$

<u>In het algemeen geldt</u>:

1e orde VW = Zoek stationaire punten

2e orde VW = Ga voor elk stationair punt na of het een *lokaal* minimum, minimum of zadelpunt is.

Hoofdstuk 8
Gebonden extrema – Extrema mét nevenvoorwaarden

Kijk goed naar de formulering: je moet zelf bepalen of er sprake is van een nevenvoorwaarde.

8.1 Gebonden extrema – twee veranderlijken

Gebonden extremum – probleem twee veranderlijken	Bij een gebonden extremum-probleem zoeken we de extrema $^{v}/_{e}$ functie $$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x, y) \mapsto f: (x, y)$$ onder een voorwaarde (nevenwaarde) $$g(x, y) = C.$$ *Doelfunctie* = de functie f *Toegelaten/bruikbare punten* = punten (x, y) die voldoen aan de voorwaarde ⇨ *We zoeken onder alle toegelaten punten (= de punten die voldoen aan de voorwaarde), naar die punten waar f in vergelijking met de functiewaarde in andere toegelaten punten een (lokaal) maximum of minimum bereikt.*
Gebonden extrema – eerste orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kan enkel een extremum bereiken in het punt (x_0, y_0), onder de voorwaarde $g(x, y) = C$, als dit punt deel uitmaakt van een stationair punt voor de Lagrange-functie $$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(\mathrm{g(x, y)} - \mathrm{C})$$ i.e. als er een waarde λ_0 bestaat waarvoor $$\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}$$ *(deze derde is gelijk aan de nevenvoorwaarde)* of $$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0)) = 0 \\ f'_y\left(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0)\right) = 0 \\ g(x_0, y_0) = C \end{cases}$$
Betekenis Lagrange-multiplicator	*De Lagrange-multiplicator λ_0 geeft aan hoe de optimale waarde $^{v}/_{d}$ doelfunctie zal veranderen wanneer de waarde van C in de nevenvoorwaarde wordt gewijzigd:* $$f_0(C + 1) \approx f_0(C) + \lambda_0$$ Of ook: als de waarde van C varieert, dan zal ook het optimum variëren, dus $x_0 = x_0(C), y_0 = y_0(C)$ en $f_0 = f_0(C) = f(x_0(C), y_0(C))$ er geldt $\lambda_0 = \dfrac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}C}(C)$.
Gerande Hessiaan	Voor een Lagrange-functie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: (x, y, \lambda) \mapsto L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - C)$ wordt de gerande Hessiaan in een punt (x_0, y_0, λ_0) gedefinieerd als $$\widetilde{H}_{f,g}(x_0, y_0, \lambda_0) = -\begin{pmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix}$$

Gebonden extrema – tweede orde voorwaarde	Beschouw partieel afleidbare functies f en g en een stationair punt (x_0, y_0, λ_0) voor het gebonden extremum-probleem: bepaal de extrema van f onder de voorwaarde $g(x, y) = C$. Als de determinant van de gerande Hessiaan $\widetilde{H}_{f,g}(x_0, y_0, \lambda_0)$ verschilt van nul, dan bereikt de functie f in (x_0, y_0) een gebonden extremum. • Indien $\det[\widetilde{H}_{f,g}(x_0, y_0, \lambda_0)] < 0$ dan bereikt f een gebonden maximum in (x_0, y_0) • Indien $\det[\widetilde{H}_{f,g}(x_0, y_0, \lambda_0)] > 0$ dan bereikt f een gebonden minimum in (x_0, y_0)

8.2 Optimaliseren met restricties – nutsfunctie

We zoeken tussen alle toegelaten punten (= tussen alle combinaties van q_1 en q_2 die voldoen aan de budgetrestrictie) naar de combinatie die het grootste nut oplevert.

Nutsfunctie: $U: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}: (q_1, q_2) \mapsto U(q_1, q_2)$ = *doelfunctie*

Budgetvoorwaarde: $p_1 q_1 + p_2 q_2 = B$ = *nevenvoorwaarde*

Lagrange-functie: $L(q_1, q_2, \lambda) = U(q_1, q_2) - \lambda(p_1 q_1 + p_2 q_2 - \mathrm{B})$

Noteer een stationair punt v/d Langrange-functie als $(q_1^0, q_2^0, \lambda_0)$ → met behulp van de gerande Hessiaan kan nagegaan worden of (q_1^0, q_2^0) effectief zorgt voor een gebonden maximum voor U.

Langrange-multiplicator λ_0: Deze waarde in het optimale punt zal aangeven met welke waarde het maximale nut $U_0(B) = U(q_1^0(B), q_2^0(B))$ benaderd zal toenemen indien het budget met één eenheid wordt verhoogd.

8.3 Optimaliseren met restricties – productie

Productieproces waarbij de productiehoeveelheden bepaald worden door arbeid (A) en kapitaal (K).

Productiefunctie: $q = P(A, K)$

Budgetfunctie: $b = Ap_A + Kp_K$

Twee verschillende problemen

⇨ Kijk dus goed wat de NVW is en wat de doelfunctie! (welke wil je zo klein/groot mogelijk)

Budgetrestrictie (= maximale productiegrootte zoeken)

- Maximaliseer de productiehoeveelheid onder een budgetrestrictie.
- Ga na voor welke keuze van A en K de totale productie zo groot mogelijk is, als de waarde van het totale budget vast ligt.
- Ofwel: we zoeken tussen alle toegelaten punten (= alle combinaties van A en K die voldoen aan de budgetrestrictie) naar de combinatie die de grootste productiehoeveelheid oplevert.

We zoeken naar het maximum van de doelfunctie $q = (A, K)$

onder de voorwaarde (budget ligt vast) $Ap_A + Kp_K = B$

Lagrange-functie kan geschreven worden als: $L(A, K, \lambda) = P(A, K) - \lambda(Ap_A + Kp_K - \mathrm{B})$

Noteer een stationair punt v/d Langrange-functie als (A_0, K_0, λ_0) → met behulp van de gerande Hessiaan kan nagegaan worden of (A_0, K_0) effectief zorgt voor een gebonden maximum voor P.

Betekenis van Lagrange-multiplicator λ_0 ⤇ $q_0(B + 1) \approx q_0(B) + \lambda_0$

Productierestrictie

- Minimaliseer het budget onder een productierestrictie
- Ga na voor welke keuze van A en K het totale budget zo laag mogelijk is als er een bepaalde productiegrootte moet worden gerealiseerd
- Ofwel: we zoeken tussen alle toegelaten punten (= alle combinaties van A en K die voldoen aan de gevraagde productie) naar de combinatie die het kleinste budget vereist.

We zoeken naar het minimum van de doelfunctie	$b(A, K) = Ap_A + Kp_K$
onder de voorwaarde (productie ligt vast)	$P(A, K) = Q$
Lagrange-functie kan geschreven worden als:	$L(A, K, \lambda) = Ap_A + Kp_K - \lambda(P(A, K) - Q)$

Noteer een stationair punt v/d Langrange-functie als (A_0, K_0, λ_0) → met behulp van de gerande Hessiaan kan nagegaan worden of (A_0, K_0) effectief zorgt voor een gebonden minimum voor b.

Betekenis van Lagrange-multiplicator $\lambda_0 \Rightarrow b_0(Q+1) \approx b_0(Q) + \lambda_0$

8.4 Gebonden extrema – n veranderlijken

Voor functies van meer dan twee veranderlijken betekent dit dat gezocht wordt naar extrema waarbij moet voldaan worden aan één of meer bijkomende voorwaarden.

Gebonden extremum-probleem n veranderlijken	Bepaal de extrema van de functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto f: (x_1, \dots, x_n)$ onder de voorwaarden $(m < n)$ $\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = C_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = C_m \end{cases}$
Lagrange-functie	Voor het bepalen van de extrema van f onder m voorwaarden g_1 tot g_m: $$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k(x_1, \dots, x_n) - C_k)$$ variabelen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ = *Lagrange-multiplicatoren*
Gebonden extrema – eerste orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan enkel een extremum bereiken in het punt $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, onder de voorwaarden $g_k(x_1, \dots, x_n) = C_k$, als dit punt deel uitmaakt van een stationair punt voor de Lagrange-functie $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (g_k(x_1, \dots, x_n) - C_k)$ i.e. als er waarden $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ bestaan waarvoor $\begin{cases} L'_{x1}(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) = 0 \\ \vdots \\ L'_{xn}(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) = 0 \\ L'_{\lambda 1}(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) = 0 \\ \vdots \\ L'_{\lambda m}(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) = 0 \end{cases}$
Lagrange-multiplicatoren	= de variabelen $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ Deze waarden zullen aangeven hoe de optimale waarde van de doelfunctie zal veranderen wanneer de waarden van $C_1, \dots, C_m$ in de nevenvoorwaarden worden gewijzigd.

Hoofdstuk 9
Elementaire rijoperaties

Het uitvoeren van een rijoperatie op de matrix $\mathbf{A}$ is equivalent met het voorvermenigvuldigen van $\mathbf{A}$ met een elementaire matrix ($\mathbf{E}$ -matrix).

$\mathbf{A}$ = m x n matrix *In dit hfst. geldt even p = 1 en q = 2*

$\mathbf{E}$ = vierkante matrix van m -de orde

Met $\boldsymbol{e}_p$ en $\boldsymbol{e}_q$ verwijzen we naar de p-de kolom en q-de kolom van de m x m-eenheidsmatrix.
($\boldsymbol{e}_p$ is bijgevolg een m x 1-matrix met $m - 1$ nullen en één 1 op de p -de plaats)

9.1 Omwisselen van twee rijen

Elementaire matrix v/d eerste soort: $\mathbf{E}_{pq} = \mathbf{I}_m + (\boldsymbol{e}_p - \boldsymbol{e}_q)(\boldsymbol{e}_q - \boldsymbol{e}_p)^{\mathrm{T}}$

Een matrix voorvermenigvuldigen met een elementaire matrix $\mathbf{E}_{pq}$ leidt tot een matrix waarin de p-de en de q-de rij van plaats gewisseld werden.

- ⇨ In plaats van de matrixvermenigvuldiging uit te voeren, zullen we simpelweg de rijoperatie zelf toepassen op $\mathbf{A}$.

Notatie: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{pq}} \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Determinant

Het teken van de determinant van een matrix zal veranderen wanneer op de matrix een elementaire rijoperatie v/d eerste soort uitgevoerd wordt.
De determinant van een elementaire matrix v/d eerste soort is namelijk gelijk aan –1, immers:

$$\det(\boldsymbol{E}_{pq}) = \det(\mathbf{E}_{pq}\mathbf{I}) = -\det(\mathbf{I}) = -1$$

9.2. Een rij vermenigvuldigen met een getal

Elementaire matrix v/d eerste soort: $\mathbf{E}_{p(\alpha)} = \mathbf{I}_m + (\alpha - 1)\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_p{}^{\mathrm{T}}$ *met* $\alpha \neq 0$

Het linksvermenigvuldigen van $\mathbf{A}$ met een E-matrix v/d tweede soort komt neer op het vermenigvuldigen van de oorspronkelijke elementen van de p-de rij van $\mathbf{A}$ met een reëel getal α.

- ⇨ In plaats van de matrixvermenigvuldiging uit te voeren, zullen we simpelweg de rijoperatie zelf toepassen op $\mathbf{A}$.

Notatie: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{p(\alpha)}} \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b & \alpha \cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Determinant

De determinant van een matrix zal vermenigvuldigd worden met α wanneer op de matrix een elementaire rijoperatie v/d tweede soort uitgevoerd wordt.
De determinant van een elementaire matrix v/d tweede soort is namelijk gelijk aan α, immers:

$$\det(\mathbf{E}_{p(\alpha)}) = \det(\mathbf{E}_{p(\alpha)}\mathbf{I}) = \alpha \cdot \det(\mathbf{I}) = \alpha$$

9.3. Bij een rij een veelvoud van een andere rij optellen

Elementaire matrix v/d eerste soort: $\mathbf{E}_{pq(\alpha)} = \mathbf{I}_m + \alpha \cdot \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q{}^{\mathrm{T}} \quad met\ \alpha \neq 0$

Door een matrix $\mathbf{A}$ links te vermenigvuldigen met een E-matrix v/d derde soort wordt bij de p-de rij een veelvoud van de q-de rij opgeteld.

⇨ In plaats van de matrixvermenigvuldiging uit te voeren, zullen we simpelweg de rijoperatie zelf toepassen op $\mathbf{A}$.

Notatie: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{pq(\alpha)}} \begin{pmatrix} a+\alpha\cdot d & b+\alpha\cdot e & c+\alpha\cdot f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Determinant

De determinant van een matrix *niet* zal veranderen wanneer op de matrix een elementaire rijoperatie v/d derde soort uitgevoerd wordt.

De determinant van een elementaire matrix v/d derde soort is namelijk gelijk aan 1, immers:

$$\det\left(\mathbf{E}_{pq(\alpha)}\right) = \det\left(\mathbf{E}_{pq(\alpha)}\mathbf{I}\right) = \det(\mathbf{I}) = 1$$

Hoofdstuk 10
Inverse van een matrix

Bewijzen: *pag. 119 + 120 + 121 + 122*

Bewijzen van eigenschappen:
De twee bewijzen uit de definitie controleren $\Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$ *en* $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$

$$\text{Let op: } \mathbf{A}^{-1} \neq \frac{1}{A} \quad (nooit\ delen\ door\ een\ matrix)$$

10.1 Definitie en eigenschappen

Inverteerbaar – definitie	De vierkante matrix $\mathbf{A}$ van n-de orde is inverteerbaar als er een matrix $\mathbf{B}$ bestaat, zodat: $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n \text{ en } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$ $\mathbf{B}$ = de *inverse* van A
Inverse is uniek	De inverse v/d inverteerbare matrix $\mathbf{A}$ is uniek en wordt aangeduid met $\mathbf{A}^{-1}$ $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \text{ en } \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$
Inverse van een veelvoud	Als $\mathbf{A}$ een inverteerbare matrix is, dan is α · $\mathbf{A}$ (met α een reëel getal ≠ 0) ook inverteerbaar en $$(\alpha \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$
Inverse van een inverse	De inverse van $\mathbf{A}^{-1}$ is opnieuw $\mathbf{A}$**:** $$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$
Inverse van een getransponeerde	De bewerkingen inverteren en transponeren mogen omgewisseld worden: $$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$$
Inverse van een symmetrische matrix	Indien $\mathbf{A}$ een inverteerbare symmetrische matrix is, dan is $\mathbf{A}^{-1}$ ook symmetrisch. *Symmetrisch* $\Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$
Inverse van een diagonaalmatrix	Zij $\mathbf{D}$ een inverteerbare n-de orde diagonaalmatrix, dan is $\mathbf{D}^{-1}$ ook een diagonaalmatrix, met omgekeerde hoofddiagonaalelementen. *(Merk op dat* $d_{ii} \neq 0$ *voor alle* $i = 1, \ldots, n$ *indien* $\boldsymbol{D}$ *inverteerbaar is)*
Inverse van een product	Zij $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ twee n x n matrices die inverteerbaar zijn. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ is ook inverteerbaar en $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
Inverse van een macht van een matrix	De inverse van een macht van $\mathbf{A}$ is gelijk aan diezelfde macht van de inverse van $\mathbf{A}$: $$(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k$$
Criterium: wanneer inverteerbaar	Een vierkante matrix $\mathbf{A}$ van n-de orde is inverteerbaar als en slechts als hij regulier is. Een matrix is regulier als det $(\mathbf{A}) \neq 0$. Daaruit volgt: $$\mathbf{A} \textbf{ is inventeerbaar} \Leftrightarrow \mathbf{det}\ (\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$$
Determinant van een inverse matrix	De determinant van de inverse van $\mathbf{A}$ is gelijk aan het omgekeerde van de determinant van $\mathbf{A}$: $$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

Determinant van nuldelers	Twee vierkante nuldelers hebben altijd determinant nul. (dus nuldelers zijn nooit inverteerbaar)

10.2 De inverse berekenen m.b.v. cofactoren

Formule om de inverse van een reguliere matrix $\mathbf{A}$ te berekenen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

Waarin:
$\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ = *toegevoegde/adjuncte matrix*

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{C}$ = *cofactorenmatrix* van $\mathbf{A}$ ⤇ elk element in de matrix $\mathbf{A}$ vervangen door zijn cofactor.

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$$

Inverse van een *2* x *2*-matrix

Indien we deze methode toepassen op een *2* x *2*-matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan verkrijgen we de formule:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

10.3 De inverse berekenen m.b.v. rijoperaties

⇨ *2e methode, want cofactoren van alle elementen bereken kost veel tijd.*

We kunnen de inverse van A berekenen door de eenheidsmatrix voor te vermenigvuldigen met de matrix $\mathbf{E}$.
Het geldt namelijk: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}$

We verkrijgen de inverse van $\mathbf{A}$ dus door de elementaire rijoperaties, die nodig zijn om $\mathbf{A}$ om te vormen tot de eenheidsmatrix, ook toe te passen op de eenheidsmatrix
(m.a.w. we zetten de eenheidsmatrix naast de matrix $\mathbf{A}$ en voeren elementaire rijoperaties uit zodat $\mathbf{A}$ de eenheidsmatrix word. Waar oorspronkelijk de eenheidsmatrix stond, staat dan uiteindelijk $\mathbf{A}^{-1}$)

Tip: stappenplan om $\mathbf{A}$ om te zetten in een eenheidsmatrix

1) Begin bij kolom 1: creëer nullen in de benodigde rijen (dus alle rijen behalve de 1e)
2) Doe hetzelfde voor alle andere kolommen, in de volgorde van kolom 1 t/m kolom m.
3) Vermenigvuldig nu iedere rij met het juiste getal, om te zorgen dat de hoofddiagonaalelementen gelijk worden aan 1.

Let op: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ *en* $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, *máár* $\mathbf{A}^{-1} \cdot X \cdot \mathbf{A} \neq$

Hoofdstuk 11
Lineaire stelsels

Bewijzen: *pag. 135 + 136 + 137 + 140 + 141 +*

11.1 Definities

Lineair stelsel	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ Met m lineaire vergelijken en n onbekenden, waarbij a_{ij} *en* b_i reële getallen zijn en x_j de onbekenden (met $1 \leq i \leq m$ en $1 \leq j \leq n$)
waarbij:	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ = de m x n-coëfficiëntenmatrix $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = de n x 1-kolommatrix $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ = de m x 1-kolommatrix met de rechterleden
Homogeen stelsel	Indien alle rechterleden uit het stelsel gelijk zijn aan nul (dus $\mathbf{b} = \mathbf{0}$)
Niet-homogeen stelsel	Indien minstens één rechterlid verschillend is van nul
Vierkant stelsel	Indien het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden ($\mathrm{m} = \mathrm{n}$)
Strijdig/onoplosbaar stelsel	Indien er geen enkele kolom $\mathbf{x}$ bestaat waarvoor alle vergelijkingen voldaan zijn
Oplosbaar stelsel	Indien er minstens één kolom $\mathbf{x}$ bestaat waarvoor alle vergelijkingen opgaan
Uitgebreide matrix	Bij de uitgebreide matrix wordt de kolom van de rechterleden als extra kolom achter de coëfficiëntenmatrix geplakt. $\mathbf{A}^{\mathrm{U}}$ heeft orde m x $(n+1)$. $\mathbf{A}^{\mathrm{U}} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \mid & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \mid & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mid & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \mid & b_m \end{pmatrix}$ *(bij een lineair stelsel $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en met die voorwaarden etc.)*

11.2 Stelsel van Cramer

Stelsel van Cramer	= Een vierkant stelsel met precies één oplossing
Stelsel van Cramer oplossen m.b.v. inverse	Bij een stelsel van Cramer $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ is de unieke oplossing te vinden als: $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$ *Want*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ Wanneer $\mathbf{A}$ inverteerbaar is, bekomen we inderdaad één unieke oplossing (want de inverse $\mathbf{A}^{-1}$ is uniek) ⇨ *Om na te gaan of een vierkant stelsel een stelsel van Cramer is, gaan we na dat:* $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$
Homogeen stelsel van Cramer	Een homogeen stelsel (dus $\mathbf{b} = \mathbf{0}$) van Cramer heeft als unieke oplossing de nuloplossing. *Want*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ⇨ Merk op: een homogeen stelsel kan nooit strijdig zijn, omdat de nuloplossing altijd een oplossing is.
Methode van Gauss	Bij de methode van Gauss worden elementaire rijoperaties toegepast op de uitgebreide matrix totdat nullen gecreëerd werden onder alle hoofddiagonaalelementen. Achterwaartse substitutie levert de gezochte unieke oplossing. ⇨ Bij deze methode wordt het stelsel ‘gemakkelijker’ gemaakt door er voor te zorgen dat in de onderste vergelijking enkel de coëfficiënt van x_n verschillend is van nul; deze vergelijking geeft de oplossing voor x_n. In de voorlaatste vergelijking zullen enkel de coëfficiënten van x_{n-1} en van x_n verschillend zijn van nul. Aangezien x_n reeds berekend werd uit de laatste vergelijking, levert de voorlaatste vergelijking ons de waarde van x_{n-1}. Voortzetten van deze werkwijze zorgt er voor dat we uit de eerste vergelijking ten slotte x_1 kunnen berekenen.
Methode van Gauss-Jordan	Bij de methode van Gauss worden elementaire rijoperaties toegepast op de uitgebreide zodat de coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A}$ omgevormd wordt tot de eenheidsmatrix. De laatste kolom levert uiteindelijk de gezochte oplossing. *Praktisch betekent dit dat we de elementaire rijoperaties toepassen p de uitgebreide matrix.*

Deze twee methodes steunen op het feit dat je een equivalent stelsel bekomt wanneer elementaire rijoperaties uitgevoerd worden op de uitgebreide matrix.

11.3 (On)afhankelijkheid van rijen en kolommen

De definities verlopen analoog voor rijen.

Lineaire combinatie	Beschouw m x 1–kolommen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_\mathrm{n}$. Een lineaire combinatie van deze kolommen is dan elke uitdrukking $$k_1 \cdot \mathbf{V}_1 + k_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \cdots + k_n \cdot \mathbf{V}_\mathrm{n}$$ waarbij $k_1, \dots, k_n$ willekeurige reële getallen zijn. ⇨ Hierdoor krijgen we een extra/nieuwe kolom. k_i = *coëfficiënt* van $\mathbf{V}_\mathrm{i}$
Lineair (on)afhankelijke kolommen	Lineair onafhankelijk: als de enige lineaire combinatie van deze kolommen die de *nulkolom* oplevert, juist die combinatie is waarbij *alle coëfficiënten nul* zijn. $$\forall k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}: k_1 \cdot \mathbf{V}_1 + k_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \cdots + k_n \cdot \mathbf{V}_\mathrm{n} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

	Lineair afhankelijk: indien minstens 1 $^{v}/_{d}$ coëfficiënten verschillend is van nul ⇨ Bereken de determinant van de coëfficiëntenmatrix; indien $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ → homogeen stelsel van Cramer → enkel de nuloplossing
Kenmerk lineair afhankelijke kolommen	▪ Als kolommen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_\mathrm{n}$ lineair afhankelijk zijn, dan is er minstens één kolom te schrijven als lineaire combinatie $^{v}/_{d}$ overige kolommen. ▪ Als bij n kolommen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_\mathrm{n}$ minstens één kolom te schrijven is als lineaire combinatie $^{v}/_{d}$ overige kolommen, dan zijn deze n kolommen lineair afhankelijk.
Bij twee stelsels (n=2, dus $\mathbf{V}_1$ en $\mathbf{V}_2$)	Indien veelvoud: lineair afhankelijk Indien géén veelvoud: lineair onafhankelijk
Inproduct	Het inproduct van twee kolommen $\mathbf{V}_1$ en $\mathbf{V}_2$ is de matrixvermenigvuldiging $$\mathbf{V}_1{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_2$$ De matrixvermenigvuldiging geeft als resultaat een 1 x 1-matrix,dus een getal.
Commutatief	Het inproduct is commutatief (= verwisselbaar): $$\mathbf{V}_1{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_1$$
Orthogonale kolommen	We noemen de van de nulkolom verschillende kolommen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_\mathrm{n}$ onderling orthogonaal, als alle inproducten van $\mathbf{V}_\mathrm{i}$ en $\mathbf{V}_\mathrm{j}$ met $i \neq j$ gelijk zijn aan nul: $$\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n: \mathbf{V}_\mathrm{i}{}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}_\mathrm{j} = 0$$ ⇨ Onderling orthogonale kolommen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_\mathrm{n}$ (allen verschillend van de nulkolom) zijn steeds *lineair onafhankelijk*.

11.4 Rang van een matrix

Rang van een matrix	De rang van een matrix = de orde van een zo groot mogelijke reguliere deelmatrix (vierkant matrix ⤇ determinant ≠ 0). ⇨ Bij het nagaan van de rang moeten we steeds vierkante deelmatrices beschouwen; dus de rang zal steeds maximaal gelijk zijn aan het minimum $^{v}/_{h}$ aantal rijen en het aantal kolommen. ⇨ Volledige rang = als de rang ook effectief gelijk is aan dit minimum $^{v}/_{h}$ aantal rijen en het aantal kolommen
Rang van een reguliere matrix	Een *reguliere matrix* is van *volledige rang*. (aangezien de determinant ≠ 0, is de rang gelijk aan de orde $^{v}/_{d}$ matrix)
Verband tussen rang & aantal lineair onafhankelijke kolommen/rijen	De rang van een matrix is gelijk aan het maximum aantal lineair onafhankelijke kolommen van de matrix & is ook gelijk aan het maximum aantal lineair onafhankelijke rijen van de matrix. ⇨ Indien dit aantal van de rij en/of kolom kleiner is dan het aantal kolommen/rijen dat de matrix heeft, dan zijn de kolommen/rijen van $\mathbf{A}$ lineair afhankelijk (zie pag. 140 onderaan)

Rang berekenen m.b.v. elementaire rijoperaties

De rang van een matrix verandert niet wanneer op deze matrix elementaire rijoperaties worden uitgevoerd.

- Mogelijkheden bij elementaire rijoperaties: teken verandert of vermenigvuldiging met α.
- Als de determinant van de deelmatrix verschillend was van nul, dan blijft die verschillend van nul na het doorvoeren van de elementaire rijoperatie.
- Als de determinant van de deelmatrix gelijk was aan nul, dan blijft die gelijk aan nul na het doorvoeren van de elementaire rijoperatie.

De rang van een matrix is gelijk aan het aantal *niet-nulrijen* van de gereduceerde matrix.
Deze gereduceerde matrix wordt bekomen door m.b.v. elementaire rijoperaties nullen te creëren onder het hoofdelement van elke rij.
Hoofdelement van een rij = het meest linkse element dat verschillend is van nul.
(op deze manier ga je voor de kolommen van links naar rechts)
Opmerking (over de matrix omzetten een stelsel van vergelijkingen)
Indien je uitgaat van kolommen: Iedere $\mathbf{V}_\mathrm{i}$ staat voor de waarden van één x_i
Indien je uitgaat van rijen: Iedere $\mathbf{V}_\mathrm{i}$ staat voor één vergelijking, dus met de verschillende $x_i's$

11.5 Strijdige en oplosbare stelsels

Een lineair stelsel $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ **is** oplosbaar $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}^\mathrm{U})$

Bewijs:
Bij een oplosbaar stelsel is de kolom $\mathbf{b}$ te schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van $\mathbf{A}$. Dit betekent dat de kolom $\mathbf{b}$ lineair afhankelijk is van de kolommen van $\mathbf{A}$.
M.a.w. het aantal lineair onafhankelijk kolommen in $\mathbf{A}$ is gelijk aan het aantal lineair onafhankelijke kolommen in $\mathbf{A}^\mathrm{U}$. De rang van $\mathbf{A}$ zal dus gelijk moeten zijn aan die van $\mathbf{A}^\mathrm{U}$.

Merk op: een homogeen stelsel heeft altijd een oplossing! (nulkolom altijd een oplossing)

11.6 Aantal oplossingen van een lineair stelsel

# oplossing	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (homogeen)
0	$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rang}(\mathbf{A}^\mathrm{U})$	/
1	$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}^\mathrm{U}) = n$	$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$
∞ veel	$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}^\mathrm{U}) < n$	$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n$

(geen $\boldsymbol{A}^U$ gebruiken bij homogeen stelsel)

Laat $\mathbf{A}$ een m x n-matrix zijn, $\mathbf{x}$ een n x 1-kolommatrix met onbekenden en $\mathbf{b}$ een m x 1-kolommatrix met rechterleden.
Een oplosbaar stelsel $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (de kolom $\mathbf{b}$ is evt. de nulkolom) heeft precies één oplossing indien

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$$

(bij een homogeen stelsel is deze unieke oplossing de nulkolom)

En het heeft oneindig veel oplossingen indien

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n$$

Vrije parameters = $n - \mathrm{rang}(\mathbf{A})$ = het aantal onbekenden dat vrij gekozen kan worden.

Stappenplan

1. Ga na of het stelsel oplosbaar is: $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}^\mathrm{U})$
   (hieruit kun je ook afleiden hoeveel oplossingen en hoeveel vrije parameters er zullen zijn)
2. Houd de lineair onafhankelijke vergelijkingen over → rijen die niet 0 zijn.
   = gereduceerde matrix $\mathrm{R}(\mathbf{A}^\mathrm{U})$
3. Maak het stelsel vierkant & kies de parameter(s)
4. Los het stelsel van Cramer op.

11.7 Input-output model

Input-output tabel = Een schematische en vereenvoudigde weergave van de goederenstroom tussen de verschillende sectoren van de economie.

Intermediaire vraag = De output die de verschillende sectoren leven, die gebruikt kan worden als input voor de andere sectoren.

Finale vraag = De marktvraag (hiervoor moet de output ook voldoende zijn)

Output	**Input**	**Verbruikers** *Intermediaire vraag* $1 \cdots j \cdots m$	*Finale vraag* q_i	**Totale productie**
Producerende sectoren	1	$x_{11} \cdots x_{1j} \cdots x_{1m}$	q_1	x_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	i	$x_{i1} \cdots x_{ij} \cdots x_{im}$	q_i	x_i
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	$x_{m1} \cdots x_{mj} \cdots x_{mm}$	q_m	x_m

Voor de gezochte outputs moet gelden:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + q_1 \qquad (1 \leq i \leq m)$$

Ofwel, de totale productie van sector i = som van de intermediaire vraag + finale vraag

Statische input-output model: wordt opgebouwd vanuit de input-output tabel, rekening houdend met de assumptie van vaste productiecoëfficiënten a_{ij}.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

a_{ij} is dus de hoeveelheid input van sector i nodig voor één eenheid output van sector j.
Voor de gezochte outputs moet dus gelden

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j + q_1 \qquad (1 \leq i \leq m)$$

We krijgen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

Of

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q}$$

$\mathbf{A}$ = *input-output matrix / technologiematrix*
$\mathbf{q}$ = *de kolom van de finale vraag*

We verkrijgen een *niet-homogeen stelsel* met als *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q}$$
$$\Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q}$$

Oplossen van dit stelsel laat toe de hoeveelheid productie te berekenen die nodig is om te voldoen aan de intermediaire én de finale vraag → methode van Gauss gebruiken.

In de matrix $\mathbf{A}$ staat het element a_{ij} voor het aantal eenheden dat bedrijf j nodig heeft uit bedrijf i voor de productie van één eenheid.
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ = de productie om te voldoen aan de intermediaire vraag.

Hoofdstuk 12
Diagonalisatie

12.1 Definitie eigenwaarden en eigenvectoren

Beschouw een vierkante matrix $\mathbf{A}$ van n-de orde, een n x 1-kolom $\mathbf{x}$, met $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$**,** en een reëel getal λ.
Dan is $\mathbf{x}$ een *eigenvector* van $\mathbf{A}$ en λ een *eigenwaarde* van $\mathbf{A}$ als geldt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

12.2 Bepalen van eigenwaarden

De gelijkheid $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ kan herschreven worden tot een homogeen stelsel:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Een eigenvector is per definitie verschillend van de nulkolom, dus moet de rang van de coëfficiëntenmatrix $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$ kleiner zijn dan n (dan heb je ∞ veel oplossingen)

- ⇨ $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$ moet dus een singuliere matrix zijn (want geen volledige rang dus geen reguliere matrix, zie par. 11.4)
- ⇨ determinant van $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$ moet gelijk zijn aan 0.

De eigenwaarden van een matrix $\mathbf{A}$ zijn oplossingen van de *karakteristieke vergelijking*

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$$

<u>Karakteristieke vergelijking</u> =	een n -degraadsvergelijking en zal hoogstens n reële oplossingen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hebben, waarvan sommigen eventueel kunnen samenvallen.
<u>Multipliciteit</u> =	Het aantal keer dat een eigenwaarde voorkomt als oplossing van de karakteristieke vergelijking.

Eigenwaarden van een driehoeksmatrix

De eigenwaarden van een bovendriehoeksmatrix, benedendriehoeksmatrix of een diagonaalmatrix zijn *gelijk aan de hoofddiagonaalelementen*.

12.3 Bepalen van eigenvectoren

Voor elke eigenwaarde λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ kunnen we de bijhorende eigenvectoren berekenen als oplossingen van het homogene stelsel:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Omdat λ_i een oplossing is van de karakteristieke vergelijking, is de coëfficiëntenmatrix singulier.
Bij elke eigenwaarde horen dus steeds oneindig veel eigenvectoren.
(het aantal vrij te kiezen parameters is gelijk aan $n - rang(\lambda_i \cdot \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$)

Stappenplan:

1) Bereken de rang van de coëfficiëntenmatrix, ofwel van $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n)$
2) Houd de lineair onafhankelijke vergelijkingen over → rijen die niet 0 zijn.
   = gereduceerde matrix $\mathrm{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{U}})$
3) Maak het stelsel vierkant & kies de parameter(s)
4) Los het stelsel op & noteer de eigenvectoren horende bij λ_i

12.4 Economische toepassing eigenwaarden en eigenvectoren

Zie uitleg in het boek op pagina 154 – 155.

- ⇨ Uit de context kun je halen voor welke eigenvector jet het moet berekenen.
  Niet gewoon alle eigenvectoren doen -> is niet nodig

12.5 Eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden

Eigenvectoren geassocieerd met verschillende eigenwaarden zijn lineair onafhankelijk.

(= de enige combinatie van deze kolommen die de nulkolom oplevert, is die combinatie waarbij alle coëfficiënten nul zijn -> controleren met berekenen $^{v}/_{d}$ determinant -> det ≠ 0 is stelsel van Cramer)

12.6 Modale matrix

Modale matrix: Een modale matrix van een vierkante matrix $\mathbf{A}$ is een matrix van dezelfde orde als $\mathbf{A}$, waarvan de kolommen lineair onafhankelijke eigenvectoren van $\mathbf{A}$ zijn.

- Indien niet dezelfde orde: modale matrix bestaat niet
- Een modale matrix is <u>inverteerbaar</u>
  - Bewijs: omdat alle kolommen lineair onafhankelijk zijn, is een modale matrix steeds van volledige rang (dus $\det(\mathrm{M}) \neq 0$) en dus steeds inverteerbaar.

Een modale matrix is nooit uniek: een kolom kan steeds vervangen worden door een veelvoud er van en/of de volgorde van de kolommen kan veranderd worden.

12.7 Diagonalisatie

Diagonaliseerbare matrix	Een vierkante matrix $\mathbf{A}$ is diagonaliseerbaar indien er een modale matrix voor bestaat.
Diagonalisatie van een matrix	Een diagonaliseerbare matrix $\mathbf{A}$ kan geschreven worden als: $$\mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$ $\mathbf{D}$ = diagonaalmatrix met als hoofddiagonaalelementen de n eigenwaarden van $\mathbf{A}$ (een eigenwaarde met multipliciteit m komt m keer voor) $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ $\mathbf{M}$ = een modale matrix van $\mathbf{A}$ met eigenvectoren in dezelfde volgorde als $\mathbf{D}$ (de i-de kolom van $\mathbf{M}$ is een eigenvector bij het i -de hoofddiagonaalelement van $\mathbf{D}$) $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$
Multipliciteit versus aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren	Het maximum aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren dat hoort bij een eigenwaarde λ_i, is steeds kleiner dan of gelijk aan de multipliciteit van die eigenwaarde. *Het aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren bij eigenwaarde λ_i is gelijk aan het aantal vrije parameters uit het stelsel* $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0$

	Aangezien de som van alle multipliciteiten gelijk is aan n, zal een matrix <u>diagonaliseerbaar</u> zijn <u>indien voor elke eigenwaarde het aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren gelijk is aan de multipliciteit</u>. – Als alle EW verschillend zijn: $\mathbf{A}$ is zeker diagonaliseerbaar – Als er een EW is met een multipliciteit groter dan één, dan is $\mathbf{A}$ niet zeker diagonaliseerbaar.

Hoofdstuk 13
Toepassingen van diagonalisatie

13.1 Eigenschappen van eigenwaarden en eigenvectoren

Verband tussen determinant en spoor en eigenwaarden	Het product van de eigenwaarden is gelijk aan de determinant De som van de eigenwaarden is gelijk aan het spoor. (spoor = de som van de hoofddiagonaalelementen (van een vierkante matrix)) $$\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = determinant}$$ $$\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 = spoor}$$
Eigenwaarden van een reguliere/singuliere matrix	Een singuliere matrix heeft minstens één eigenwaarde gelijk aan nul; *(determinant = 0)* Een matrix is regulier indien alle eigenwaarden verschillend zijn van nul. *(determinant ≠ 0)*
Eigenwaarden en eigenvectoren van de getransponeerde matrix	Wanneer aan matrix $\mathbf{A}$ een eigenwaarde λ heeft, dan zal de getransponeerde matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ook deze eigenwaarde hebben, maar met mogelijk andere eigenvectoren. (want: $\det\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n\right) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n)^{\mathrm{T}} = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$)
Eigenwaarden en eigenvectoren v/e veelvoud v/e matrix	Wanneer $\mathbf{A}$ een eigenwaarde λ heeft, dan zal de matrix α · $\mathbf{A}$ een eigenwaarde α · λ hebben, met *dezelfde eigenvectoren*.

13.2 Macht berekenen m.b.v. diagonalisatie

Eigenwaarden en eigenvectoren v/e macht v/e matrix	Wanneer $\mathbf{A}$ een eigenwaarde λ heeft, dan zal de matrix $\mathbf{A}^k$ (met $k \in \mathbb{N}$) een eigenwaarde λ^k hebben, met *dezelfde eigenvectoren (dus dezelfde* $\boldsymbol{M}$*)*. $$\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{x} = \lambda^k \cdot \mathbf{x}$$
Diagonalisatie v/d macht v/e matrix	Als een matrix $\mathbf{A}$ gediagonaliseerd kan worden als: $$\mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$ Dan kan de k-de macht (met $k \in \mathbb{N}$)berekend worden als: $$\mathbf{A}^k = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{M}^{-1}$$
Opmerking	Voor het berekenen van $\mathbf{M}^{-1}$ voor een 2 x 2-matrix, denk dan aan: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

13.3 Inverteren m.b.v. diagonalisatie

Eigenwaarden en eigenvectoren v/d inverse matrix	Wanneer een reguliere matrix $\mathbf{A}$ een eigenwaarde λ heeft, dan zal de inverse matrix $\mathbf{A}^{-1}$ eigenwaarde $\frac{1}{\lambda}$ hebben, met *dezelfde eigenvectoren*. (aangezien $\mathbf{A}$ regulier is, bestaat $\mathbf{A}^{-1}$ en is geen v/d eigenwaarden gelijk aan 0)
Diagonalisatie v/d inverse v/e matrix	De inverse v/e diagonaliseerbare reguliere matrix $\mathbf{A}$ kan berekend worden als: $$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$ Waarbij $\mathbf{D}^{-1}$ = een diagonaalmatrix met als hoofddiagonaalelementen de omgekeerden van de n eigenwaarden van $\mathbf{A}$, ofwel $\frac{1}{\lambda_i}$

13.4 Eigenwaarden en eigenvectoren van een symmetrische matrix

- *Eigenvectoren* bij verschillende eigenwaarden van een **symmetrische** matrix zijn onderling orthogonaal.
  - Deze eigenvectoren zijn dus ook lineair onafhankelijk (zie eigenschap 12.2)
- Bij een **symmetrische** matrix, waarvan alle eigenwaarden multipliciteit één hebben, zullen de *kolommen van een modale matrix* onderling orthogonaal zijn.

13.5 Optimaliseren m.b.v. eigenwaarden

⇨ Voor een willekeurige n x n matrix
⇨ Je wil weten of de matrix positief definitief of negatief definitief is

Zij $\mathbf{A}$ de coëfficiëntenmatrix van een kwadratische vorm $\mathrm{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.
Dan is q:

1. Positief definiet als en slechts als $\lambda_i > 0$ voor alle i $\qquad (1 \leq i \leq n)$
2. Negatief definiet als en slechts als $\lambda_i < 0$ voor alle i $\qquad (1 \leq i \leq n)$

waarbij λ_i de eigenwaarden zijn van $\mathbf{A}$.

13.6 Transitiematrices (overgangsmatrices)

Transitiematrix = Matrix waarin de relatieve cijfers de overgangswaarschijnlijkheden vormen.
= *overgangsmatrix* → de voorwaardelijke kansen dat consumenten overstappen naar een ander product of bij hetzelfde product blijven

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

- De diagonaalelementen p_{ii} geven de voorwaardelijke kansen weer dat de consument bij zijn keuze blijft.
- De niet-diagonaalelementen p_{ij} geven de voorwaardelijke kans dat een consument overschakelt van merk j naar merk i.

Gesloten systeem = *Markov-systeem* → het totaal aantal consumenten blijft steeds constant.

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ij} = 1 \qquad (1 \leq j \leq 3)$$

Het aantal kopers van mark A in periode $t+1$ is:

$$x_{\mathrm{A}}(t+1) = p_{11} \cdot x_{\mathrm{A}}(t) + p_{12} \cdot x_{\mathrm{B}}(t) + p_{13} \cdot x_{\mathrm{C}}(t)$$

(analoge beredenering voor de merken B en C)

Hierdoor geldt:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(\boldsymbol{t})$$

Met $\mathbf{x}(t)$ en $\mathbf{x}(t+1)$ kolommen met consumentenaantallen.
Overeenkomstig dit model kunnen dan voor volgende periodes de consumentenaantallen berekend worden.
Merk op: de som van de consumentenaantallen blijft gelijk.

<u>Evenwichtstoestand</u>
= situatie waarbij de drie producten steeds een zelfde deel van de markt zouden hebben, ondanks het feit dat consumenten van het ene merk naar het andere overstappen.

We zoeken dus naar een vector z van consumentenaantallen waarvoor geldt:

$$\mathbf{z} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{z} \qquad \textit{ofwel,}$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0} \iff \mathbf{I_3} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{I_3} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Het probleem herleidt zich dus tot het oplossen v/e stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden (par 12.3).

<u>Let op</u>: om het volledige stelsel te bekomen, moet er rekening worden gehouden met het gesloten systeem. Dus we eisen dat de som v/d componenten v/d vector $\mathbf{z}$ gelijk is aan het consumentenaantal.

$$z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}} = consumentenaantal$$

<u>Verdeling na n perioden</u>
We kunnen berekenen hoeveel consumenten tot elke groep zullen behoren na een willekeurige tijdspanne:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{P}^{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{0})$$

Gebruik maken v/d diagonalisatie van $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}^{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{M}^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{0})$$

Stappenplan:

1) Eigenwaarden van $\mathbf{P}$ berekenen (m.b.v. karakteristieke vergelijking)
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) = 0$$
2) We bekomen daarmee $\mathbf{D}$ en zo ook $\mathbf{D}^{\boldsymbol{n}}$
3) We berekenen de eigenvectoren horende bij de eigenwaarden λ_i en verkrijgen zo de modale matrix $\mathbf{M}$ voor $\mathbf{P}$
$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{x} = 0$$
4) Bereken de inverse van de modale matrix: $\mathbf{M}^{-\mathbf{1}}$
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}$$
5) Bijgevolg kunnen we $\mathbf{P}^{\boldsymbol{n}}$ berekenen, en daarmee $\mathbf{x}(\boldsymbol{n})$

We kunnen ons ook afvragen hoeveel klanten er in elke groep zitten wanneer de n naar oneindig laten gaan ⇒ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}(n)$