Binomium van Newton

Faculteit	Voor $n \in N$ geldt $n! = n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ voor $n \neq 0$, want $0! = 1$
Combinaties	Voor $n, k \in N$ met $k \leq n$ geldt $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Functies

Functie	Een reële functie f is een voorschrift dat aan elk element van een verzameling A $\subset$ R (domein of definitiegebied, x-waarde) een element van een verzameling B $\subset$ R (bereik of beeldgebied, y-waarde) toekent. Notatie: f: A→ B: x → f(x) of f: R→ R: x → f(x)
Eénwaardig	Een functie is éénwaardie wanneer met elke waarde van de onafhankelijke veranderlijke (x) juist 1 waarde van de afhankelijke veranderlijke (y) overeenstemt. In andere gevallen noemt men de functie meerwaardig.
Eénduidig	Een functie is éénduidig wanneer met elke waarde van de afhankelijk veranderlijke (y) juist 1 waarden van de onafhankelijke veranderlijke (x) overeenstemt. In andere gevallen noemt men de functie meerduidig.
Expliciet	Men spreekt van een expliciete voorstelling van de functie f: R→ R, wanneer het voorschrift kan geëxpliciteerd worden naar de afhankelijke veranderlijke, maw y=f(x).
Impliciet	Men spreekt van een impliciete voorstelling van de functie f: R→ R, wanneer het voorschrift niet kan geëxpliciteerd worden naar de afhankelijke veranderlijke, maar impliciet bepaald wordt uit een verband F(x,y)=0
Stuksgewijs gedefinieerde functie	Een reële functie g: R→ R: x → g(x) is een stuksgewijs gedefinieerde functie indien het voorschrift verschilt voor verschillende delen van het domein van de functie.
Even – oneven	Een reële functie f: R→ R: x → f(x) is een even functie, indien voor elke waarde x uit het domein geldt: f(x)=f(-x). de grafiek van de functie is symmetrisch tov Y-as. Een reële functie f: R→ R: x → f(x) is een oneven functie, indien voor elke waarde x uit het domein geldt: f(x)= -f(-x). de grafiek van de functie is symmetrisch tov oorsprong. Het is ook mogelijk dat de functie noch even, noch oneven is.
Invers	Een reële functie g: R→ R: x → g(x) is een inverse functie van f: R→ R: x → f(x), indien voor elke waarde y uit het domein van f geldt: f(y)=x ⇔ g(x)=y (⇔f'(x)=y) Meestal noteert men de inverse functie als g=f^{-1}. De beeldlijnen van de functies f en f^{-1} zijn gespiegeld tov de eerste bissectrice (y=x)
Samengestelde functie	Een reële functie f: R→ R: x → f(x) is een samenstelling van functies g: R→ R: → g(x) en h: R→ R: → h(x), of f= g o h, indien voor elke waarde van x geldt f(x)= g(h(x)).

Limieten

Limiet	Een functie f : R → R : x → f(x)bereikt in het punt x = a de limietwaarde L, of $\lim_{x \to a} f(x) = L$ als de functiewaarden willekeurig dichtbij L komen voor die punten die dicht naar a naderen. A mag ook ∞ zijn.
Oneigenlijk	Wanneer de functiewaarde f(x) onbeperkt toeneemt of afneemt wanneer x nadert naar een reëel getal a (of naar $\pm\infty$), dan noemt men de limiet oneigenlijk. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. In dit geval bereken we afzonderlijk linker – en rechterlimiet.
Linker – en rechterlimiet	De linkerlimiet van en functie f in het punt x =a wordt gedefinieerd als $\lim_{x \gtrless a} f(x)$

	De rechterlimiet van en functie f in het punt x =a wordt gedefinieerd als $\lim_{x \overset{\to}{>} a} f(x)$ De limiet van een functie in een punt bestaat enkel als in dat punt zowel linker- als rechterlimiet bestaan en deze limieten aan elkaar gelijk zijn.
Continuïteit	Een functie f : R → R : x → f(x) is continu in een punt x =a als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Indien de functiewaarde of de limietwaarde niet bestaan, of indien ze verschillend zijn, noemt men de functie discontinu in het betreffende punt.
Asymptoten	Een asymptoot van een functie is een rechte die de beeldlijn van deze functie willekeurig dicht nadert. Men deelt de asymptoten op in 3 types: • Horizontale asymptoot: y=b • Verticale asymptoot: x=a • Schuine asymptoot: y=mx+q (m≠0) Een éénwaardige functie kan een onbeperkt aantal verticale asymptoten hebben, maar in totaal hoogstens 2 schuine en/of horizontale asymptoten.
Lineaire functie	Een lineaire functie of affiene functie heeft voorschrift f: R→ R: x → f(x) = mx+q. Een lineaire functie is éénwaardig en continu en wordt grafisch voorgesteld door een rechte. De waarde m is de richtingscoëfficiënt of helling van de functie, de waarde q bepaalt het snijpunt van de beeldlijn van de functie met de y-as. Een vergelijking van een rechte kan geschreven worden in; Impliciete vorm ax+by+c=0, met a, b ∈ R niet beiden nul, of Expliciete vorm y=mx+q, met m, q ∈ R, of Expliciete vorm x=p, met p ∈ R De vergelijking van een rechte door twee punten met coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) kan gevonden worden als $(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$ De rico = $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ De vergelijking van een rechte door 1 punt met coördinaten (x_1, y_1) en met gegeven rico m kan gevonden worden als $y - y_1 = m(x - x_1)$ Snijpunten van 2 rechten met vergelijkingen $a_1x+b_1y+c_1=0$ en $a_2x+b_2y+c_2=0$ kunnen gevonden worden door oplossing van het stelsel $\begin{cases} a1x + b1y + c1 = 0 \\ a2x + b2y + c2 = 0 \end{cases}$ Ofwel heeft dit geen enkele oplossing, ofwel heeft dit 1 unieke oplossing (snijpunt), ofwel heeft dit oneindig veel oplossingen (rechten vallen samen).
Absolute waarde functie	De absolute waarde functie associeert met elk reëel getal zijn absolute waarde: abs : R→ R: x → abs(x) = |x|
Veeltermfunctie	Een veeltermfunctie van graad n heeft voorschrift f: R→ R: x → $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, met n ∈ N en met $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \neq 0$. Een veeltermfunctie heeft als domein de gehele reële as, is éénwaardig en continu
Parabool	$y - y = a(x - x0)^2$ Veeltermfunctie van graad 2. De top van de parabool heeft coördinaten (x_0, y_0). De symmetrieas is evenwijdig aan de y-as en heeft vergelijking $x = x_0$. De parabool heeft de holle zijde naar boven indien a>0, naar benden indien a<0. Elke vergelijking van de gedaante $y=ax^2+bx+c$ beschrijft een parabool. Om de top te kennen, bereken je $x_0 = -\frac{b}{2a}$; y_0 is dan de functiewaarde van x_0.
Rationale functie (veeltermbreuk)	Een rationale functie heeft voorschrift f : R→ R: x → $f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$, met n,m ∈ N en met $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ ∈ R. het domein van een rationale functie is de reële as

	verminderd met de waarden waarvoor de noemer nul wordt. Een rationale functie is continu op haar domein.
Irrationale functie	Een irrationale functie heeft een voorschrift waarin een of meer wortelvormen voorkomen. Het domein van een irrationale functie is beperkt tot dat deel van de reële as waarvoor het argument onder de wortel het juiste teken bezit. Een irrationale functie is continu op haar domein.
Cirkel	De impliciete vergelijking: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, met x_0, $y_0 \in R$ en $r \in R^+_0$ beschrijft een cirkel. Het middelpunt van deze cirkel heeft coördinaten (x_0,y_0); de straal is r. domein: $[x_0-r, x_0+r]$
Exponentiële functie	Een exponentiële functie heeft voorschrift $exp_a : R \rightarrow R_0^+ : x \rightarrow exp_a(x) = a^x$, met $a \in R^+\backslash\{0,1\}$. Het domein van een exponentiële functie is R, het bereik is R^+_0. Het grondtal a is noodzakelijk strikt positief, maar verschillend van 1.
Exponentiële functie (eigenschap)	Een exponentiële functie exp_a met $a \in R^+\{0,1\}$ is • Een éénwaardige functie • Een continue functie • Een strikt stijgende functie indien a>1, en een strikt dalende functie indien a<1
Natuurlijke exponentiële functie	Grondtal: getal van Euler e= 2.718 Notatie: $exp(x)= e^x$ Zie figuur 1.15 p 21
Groei- en vervalfunctie	Een exponentiële functie expa met a>1: groeifunctie. Schrijven we het beeld van een waarde x als $y = a^x = e^{rx} met\ r = lna$ dan noemt men de positieve waarde r de groeivoet van de functie Een exponentiële functie expa met 0<a<1: vervalfunctie. Schrijven we het beeld van een waarde als $y = a^x = e^{-rx}\ met\ r = -lna$ dan noemt men de positieve waarde r de vervalconstante van de functie
Logaritmische functie	De logaritmische functie log_a is de inverse van de exponentiële functie exp_a. Ze heeft voorschrift $log_a : R^+_0 \rightarrow R : x \rightarrow log_a(x)$ met $a \in R^+\backslash\{0,1\}$, en wordt gedefinieerd als $y = log_a(x) \Leftrightarrow x= a^y$. Het domein van een logaritmische functie is R^+_0, het bereik is R. Het grondgetal a is noodzakelijk strikt positief, maar verschillend van 1. Briggse logaritme: grondtal 10 Natuurlijke logaritme: grondtal e
Logaritmische functie (eig)	Een logaritmische functie log_a met $a \in R^+\backslash\{0,1\}$ is • Een éénwaardige functie • Continue functie op het domein • Een strikt stijgende functie indien a>1, en een strikt dalende functie indien a<1
Periodiek	Een reële functie f: R→ R: x → f(x) is een periodieke functie met periode p, indien $p \in R_0^+$de kleinste waarde is waarvoor elke waarde x uit het domein geldt: f(x+p)=f(x)
Sinusfunctie	De sinusfunctie sin : R→ R: x → sin(x) • Is positief voor hoeken uit het eerste en tweede kwadrant, en negatief voor hoeken uit het derde en vierde kwadrant. • Heeft domein en R bereik $[-1, 1]$. • Is éénwaardig en meerduidig • Is een oneven functie • Is een periodieke functie met periode 2π • Is een continue functie

Cosinusfunctie	De cosinusfunctie cos : R→ R: x → cos(x) • Is positief voor hoeken uit het eerste en vierde kwadrant, en negatief voor hoeken uit het tweede en derde kwadrant. • Heeft domein en R bereik $[-1, 1]$. • Is éénwaardig en meerduidig • Is een even functie • Is een periodieke functie met periode 2π • Is een continue functie
Tangensfunctie	De tangensfunctie tan : R→ R: x → tan(x) • Is positief voor hoeken uit het eerste en derde kwadrant, en negatief voor hoeken uit het tweede en vierde kwadrant. • Heeft domein en $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi: n \in Z\right\}$ bereik R. • Is éénwaardig en meerduidig • Is een oneven functie • Is een periodieke functie met periode π • Is discontinu in
Boogsinusfunctie	De boogsinusfunctie is de inverse van de sinusfunctie. De gewone boogsinusfuctie bgsin wordt gedefinieerd als y=bgsin(x) ⇔ x=sin(y). De hoofdwaarde Bgsin wordt gedefinieerd als $y = \text{Bgsin}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$
Bgsin (eigenschap)	De functie bgsin : R→ R: x → bgsin(x) • Heeft domein [-1, 1] en bereik R • Is meerwaardig en éénduidig De functie Bgsin : R → R: x → Bgsin(x) • Heeft domein [-1, 1] en bereik [-π/2, π/2] • Is éénwaardig en éénduidig • Is continu op het domein
Boogcosinusfunctie	De boogcosinusfunctie is de inverse van de cosinusfunctie. De gewone boogcosinusfuctie bgcos wordt gedefinieerd als y=bgcos(x) ⇔ x=cos(y). De hoofdwaarde Bgcos wordt gedefinieerd als $y = \text{Bgcos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$
Bgcos (eigenschap)	De functie bgcos : R→ R: x → bgcos(x) • Heeft domein [-1, 1] en bereik R • Is meerwaardig en éénduidig De functie Bgcos : R → R: x → Bgcos(x) • Heeft domein [-1, 1] en bereik [0, π] • Is éénwaardig en éénduidig • Is continu op het domein
Boogtangensfunctie	De boogtangensfunctie is de inverse van de tangensfunctie. De gewone boogtangensfuctie bgtan wordt gedefinieerd als y=bgtan(x) ⇔ x=tan(y). De hoofdwaarde Bgtan wordt gedefinieerd als $y = \text{Bgtan}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$
Bgtan (eigenschap)	De functie bgtan : R→ R: x → bgtan(x) • Heeft domein R en bereik R\{π/2+2π: n ∈ Z} • Is meerwaardig en éénduidig De functie Bgtan : R → R: x → Bgtan(x) • Heeft domein R en bereik]-π/2, π/2[• Is éénwaardig en éénduidig • Is continu

Afgeleiden	
Afgeleiden in een punt	De afgeleide van functie f : R → R : x → f(x) in een punt x_0 wordt gedefinieerd door: $F'(x_0)= \frac{df(x)}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Afgeleide functie	De afgeleide functie f' of $\frac{df}{dx}$ van een functie f : R → R : x → f(x) beeldt elk punt af op de afgeleide in dat punt, of f' : R → R : x → $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Een functie is afleidbaar in een punt, als de afgeleide in dat punt bestaat, of als dat punt behoort tot het domein van de afgeleide functie. → als de limiet bestaat. Een punt waarin de afgeleide niet bestaat= singulier punt Noteren we Δx ipv h, dan kunnen we de breuk schrijven als $\frac{f(x+\Delta x)- f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Men noemt dit een differentiequotiënt.
Afleidbaarheid en continuïteit	Een functie f die afleidbaar is in een punt x=a, ia automatisch ook continu in dat punt. Een functie f die continu is in een punt x=a, is in dat punt niet noodzakelijk afleidbaar. Continuïteit is dus een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor afleidbaarheid. Vb absolute waarde functie abs : x → |x|, waarvoor we de afgeleide functie kunnen berekenen als $\frac{d}{dx}\text{abs}(x) = \begin{cases} -1 \text{ als } x < 0 \\ 1 \text{ als } x > 0 \end{cases}$ In alle punten $x \neq 0$ bestaat de afgeleide, en is de functie abs continu, in $x = 0$ is de functie wel continu, maar bestaat de afgeleide niet.
Kettingregel	Indien f en g afleidbare functies zijn, dan geldt voor de afgeleide van de samengestelde functie f o g $\frac{d}{dx}(f\circ g)(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
Logaritmisch afleiden	Voor een functie vergelijking $y = f(x)^{g(x)}$, kan de afgeleide al volgt gevonden worden: • Neem de natuurlijke logaritme van beide leden, en gebruik de eigenschap $\ln(a^b) = b.ln(a)$ om het rechterlid te vereenvoudigen • Leid beide leden af naar x • Los op naar y' en vul in de laatste stap het voorschrift van y in
Helling	De helling van de curve f in een punt $P = (x_0, f(x_0))$ is de helling van de raaklijn aan de curve in dat punt, en kan berekend worden als de afgeleide van f in het punt x_0 of $f'(x_0)= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Raaklijnen	Beschouw een afleidbare functie f en een punt $P = (x_0,f(x_0))$ op de curve f. De vergelijking van de raaklijn aan de curve in het punt P luidt $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$
Lineaire benadering	De beeldwaarde op de raaklijn kan gebruikt worden al benadering voor de werkelijke functiewaarde, of voor x in de buurt van x_0. $F(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Men noemt dit een lineaire benadering of benadering van eerste orde.
Middelwaardestelling	Beschouw een functie f die continu is op het gesloten interval [a,b] en afleidbaar op het open interval]a,b[. er bestaat dan minstens één punt c in het open interval]a,b[waarvoor $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ → er bestaat een c waar de helling van de raaklijn gelijk is aan de helling van de rechte door de punten (a, f(a)) en (b,f(b)). Beide rechten zijn dus evenwijdig.
Differentiaal	Voor een afleidbare functie met voorschrift y=f(x) wordt de differentiaal in een punt x_0 gedefinieerd als $df(x_0)=f'(x_0)dx$
Hogere orde afgeleide	De hogere orde afgeleiden van een functie f : R → R : x → f (x) worden gedefinieerd als $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)= \frac{d}{dx}(f'(x))$

	$f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x) = \frac{d}{dx}(f''(x))$ $f^n(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx}(f^{n-1}(x))$, $n \geq 2$

Extremum-onderzoek	
Stijgen – dalen	Een functie f is stijgend op een interval als voor elke twee punten a<b uit dit interval geldt dat f(a)≤f(b). Een functie f is dalend op een interval als voor twee punten a<b uit dit interval geldt dat f(a) ≥f(b) Strikt wil zeggen dat er geen horizontale stukken zijn. Opmerking: punten waar de functie overgaat van stijgen naar dalen of van dalen naar stijgen, zijn (lokale) extrema (minimum, maximum)
Stijgen – dalen (eigenschap)	Beschouw een functie f die afleidbaar is op een open interval. De functie f is stijgend op dit interval ⬄ f' ≥ 0 voor alle punten van het interval. De functie f is dalend op dit interval ⬄ f' ≤ 0 voor alle punten van het interval. Indien f'=0 op een interval, dan is de functie tegelijkertijd stijgend en dalend, en dus constant op dit interval. **Zie bewijs p48** Opmerking: De eigenschap zegt dat wanneer een functie overal in een interval afleidbaar is, het teken van de afgeleide aangeeft of de functie stijgt of daalt op dit interval. Ook wanneer er een discreet aantal punten zijn waar de afgeleid oneigenlijk is of zelfs niet bestaat, blijft de eigenschap gelden. Zie p 105
Convex - concaaf	Een functie f is convex op een interval als voor elke twee punten a en b uit dit interval geldt dat $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ maw als elk lijnstuk dat twee punten van de grafiek verbindt, volledig boven de grafiek ligt. Een functie is concaaf op een interval als voor elke twee punten a en b uit dit interval geldt dat $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ maw als elk lijnstuk dat twee punten van de grafiek verbindt, volledig onder de grafiek ligt.
Convex – concaaf (eig)	Beschouw een functie f die tweemaal afleidbaar is op een interval De functie f is convex op dit interval ⬄f '' ≥ 0 voor alle punten van het interval. De functie f is concaaf op dit interval ⬄ f '' ≤ 0 voor alle punten van het interval. Indien f '' = 0 op een interval, dan is de functie tegelijkertijd convex en concaaf en dus lineair op dit interval. Opmerking: De eigenschap zegt dat wanneer een functie overal in een interval tweemaal afleidbaar is, het teken van de tweede afgeleide aangeeft of de functie convex of concaaf is op dit interval. Opnieuw blijft de eigenschap gelden wanneer er een discreet aantal punten zijn waar de tweede afgeleide oneigenlijk is of zelfs niet bestaat.
Buigpunten	Een continue functie f bereikt een buigpunt in het punt x_0 Є dom(f), indien de functie in dit punt overgaat van een convexe toestand naar een concave toestand of andersom
Absolute extrema	Een functie f bereikt een absoluut maximum in het punt a, indien voor elk punt x uit het domein geldt dat f(x) ≤ f(a). Een functie f bereikt een absoluut minimum in het punt a indien voor elk punt x uit het domein geldt dat f(x) ≥ f(a).
Lokale extrema	Een functie f bereikt een lokaal maximum in het punt x_0 indien voor elk punt x in de buurt van het punt x_0 geldt dat $f(x) \leq f(x_0)$. Een functie f bereikt een lokaal minimum in het punt x_0 indien voor elk punt x in de buurt van het punt x_0 geldt dat $f(x) \geq f(x_0)$. Let op: Bij continue functies kan een extremum enkel optreden in punten waar de

	afgeleide nul wordt of niet bestaat. Het omgekeerde is niet waar: het feit dat de afgeleide nul wordt, garandeert niet dat we te maken hebben met een extremum. Het gaat dus om een noodzakelijke voorwaarde, maar niet om een voldoende voorwaarde.
Eerste test voor extrema	Beschouw een functie f die continu is in een punt x_0, dat geen randpunt is van het domein. Als de afgeleide functie in het punt x_0 verandert van teken, dan bereikt de functie in x_0 een lokaal extremum. • Indien $f'(x) > 0$ op $]x_0 - h, x_0[$ en $f'(x) < 0$ op $]x_0, x_0+h[$ voor $h \in R^+$, maw indien f in x_0 overgaat van stijgen naar dalen, dan heeft f een lokaal maximum in x_0. • Indien $f'(x) < 0$ op $]x_0 - h, x_0[$ en $f'(x) > 0$ op $]x_0, x_0+h[$ voor $h \in R^+$, maw indien f in x_0 overgaat van dalen naar stijgen, dan heeft f een lokaal minimum in x_0. Opmerking: Het bestaan van $f'(x_0)$ zelf is in deze stelling niet vereist; in het punt x_0 kan de afgeleide nul worden (een kritisch punt of stationair punt), of kan de afgeleide niet bestaan (een singulier punt). Voor functies die overal afleidbaar zijn, komen enkel de stationaire punten in aanmerking voor het bepalen van extrema.
Tweede test voor extrema	Beschouw een functie f die tweemaal afleidbaar is op een interval [a, b]. • De functie f bereikt een lokaal maximum in een punt x_0 van het interval]a, b[, als $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ • De functie f bereikt een lokaal minimum in een punt x_0 van het interval]a, b[, als $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ De voorwaarde op f' noemt men eerste orde voorwaarde en die op f'' tweede orde voorwaarde. Opmerking: Indien $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) = 0$, dan kunnen we geen onmiddellijk besluit trekken, en is verder onderzoek noodzakelijk, vb door toepassing van de eerste test voor extrema. Het punt x_0 kan dan naast een extremum ook een buigpunt zijn. Vb p 54
Eerste test voor buigpunten	Beschouw een functie f die continu is in een punt x_0, dat geen randpunt is van het domein. Als de tweede afgeleide in het punt x_0 verandert van teken, dan bereikt de functie in x_0 een buigpunt. • Indien $f''(x) > 0$ op $]x_0 - h, x_0[$ en $f''(x) < 0$ op $]x_0, x_0 + h[$ voor $h \in R^+$, maw indien f in x_0 overgaat van convex naar concaaf, dan heeft f een buigpunt in x_0 • Indien $f''(x) < 0$ op $]x_0 - h, x_0[$ en $f''(x) > 0$ op $]x_0, x_0 + h[$ voor $h \in R^+$, maw indien f in x_0 overgaat van concaaf naar convex, dan heeft f een buigpunt in x_0
Tweede test voor buigpunten	Beschouw een functie f die tweemaal afleidbaar is op een interval [a, b]/ • De functie f bereikt een buigpunt in een punt x_0 van het interval]a, b[, als $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'' \text{wisselt van teken in } x_0 \end{cases}$ Vb p 110
Globaal functieverloop	Doorloop volgende stappen bij het onderzoek naar het verloop van een reële functie f: 1. Domein • Bestaansinterval • Discontinuïteitspunten 2. Symmetrieën

	• Even – oneven • Periodiciteit 3. Eenvoudige punten • Snijpunten met coördinaatassen • Randpunten van het bestaansinterval 4. Asymptoten • Horizontale en schuine asymptoten • Verticale asymptoten 5. Eerste afgeleide • Voorschrift van f' • Nulpunten van f' (stationaire punten) en punten waar f' niet bestaat (singuliere punten) • Teken van f' voor stijgen en dalen van f • Extrema 6. Tweede afgeleide • Voorschrift van f'' • Nulpunten van f'' en punten waar f'' niet bestaat • Teken van f'' voor convexiteit van f • Buigpunten 7. Grafiek

Integralen	
Primitieve functie	Als f: R → R continu is op een interval, dan noemt men F: R → R een primitieve functie of stamfunctie van f op dit interval als $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ voor alle x in dit interval
Onbepaalde integraal	Als f: R → R continu is op een interval, dan noemt men de verzameling van alle primitieve functies van f op dit interval de onbepaalde integraal. We noteren dit als $\int f(x)dx : F(x) + C$ voor alle x in dit interval, met F een primitieve functie van f op dit interval en C een willekeurig reëel getal. F(x) achter integraalteken = integrandum, x= integratieveranderlijke, C= integraalconstante. Dx geeft an dat we de primitieve functies zoeken bij een afleiding naar x.
Onbepaalde integraal en afgeleide (eig)	Als f:R → R continu is, dan geldt $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$. Als f : R → R afleidbaar is, dan geldt $\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$ met c Є R **Zie bewijs p79**
Basiseigenschappen onbepaalde integraal (eig)	Als f : R→R en g : R → R continu zijn en k Є R, dan geldt • $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$ • $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **Zie bewijs p82**
Integratie door splitsing (eig)	Als f : R → R en g : R → R continu zijn en α, β ЄR dan geldt $$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$ **Bewijs:** volgt onmiddellijk uit de basiseigenschappen
Integratie door	Als f : R → R continu is en g : R → R afleidbaar is, dan geldt

substitutie	$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \; met \; u = g(x)$$ **Zie bewijs p 85**
Regel	Gebruik: wanneer het integrandum functievormen bevat waarvoor niet onmiddellijk een primitieve functie bekend is, maar wel kan herleid worden naar een standaardintegraal • Integrandum is standaardintegraal maar bevat ipv x een minder eenvoudige vorm g(x) • Integrandum bevat transformatie g(x) van x en ook de afgeleide ervan
Herhaling goniometrie	• $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ • $\sin(2x) = 2sinx\ cosx$ • $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \; hieruit \; volgt \; dat \cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ • $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \; hieruit \; volgt \; dat \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
Partiële integratie	Als f : R → R en g : R → R afleidbaar zijn, dan geldt $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$ **Zie bewijs p 91**
Regel	Gebruik wanneer in het integrandum exponentiële vormen, veeltermen en goniometrische vormen onderling worden gecombineerd. Kies voor f(x) die factor die eenvoudiger wordt wanneer je de afgeleide neemt. • Exponentiële factor en een veelterm - f(x): veelterm - g'(x): exponentiële vorm • Goniometrische vorm en een veelterm - f(x): veelterm - g'(x): goniometrische vorm • Exponentiële factor en een goniometrische vorm - f(x): exponentiële vorm -g'(x): goniometrische vorm → 2 keer na elkaar toepassen, dan krijg je de oorspronkelijke integraal terug, uit deze gelijkheid kan je de integraal afzonderen
Meetkundige betekenis onbepaalde integraal (eig)	Als f : R → R continu is op een interval dat x_0 bevat, als S(x) de oppervlakte is tussen de curve van f en de X-as van het vaste punt x_0 tot aan een punt x in het interval, dan geldt S'(x)=f(x) **zie bewijs p 98**
Oppervlakte tussen een curve en de x-as(eig)	Als f : R → R continu is op een interval dat x_0, a en b bevat, als F : R → R een primitieve functie is van f, dan geldt voor de oppervlakte S_{ab} tussen de curve van f en de x-as tussen de punten a en b dat S_{ab}= F(b)-F(a) **zie bewijs p 99** opmerking: wanneer de curve van f boven de x-as ligt, dan zal s_{ab} een positieve waarde hebben. Ligt de curve van f onder d x-as, dan is s_{ab} negatief.
Bepaalde integraal	Als f : R → R continu is op een interval dat a en b bevat, dan wordt de bepaalde

	integraal van f over het interval [a,b] gedefinieerd als $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]a, b = F(b) - F(a)$ met F een primitieve functie van f op [a,b]
Eigenschap	Als f : R→ R continu is op een interval dat a en b bevat en S_{ab} is de oppervlakte tussen de curve van f en x-as tussen de punten a en b, dan geldt $\int_a^b f(x)dx = S_{ab}$
Basiseigenschappen	Als f : R → R continu is op een interval dat a, b en c bevat en k ЄR, dan geldt • $\int_b^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ • $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ • $\int_a^a f(x)dx = 0$ • $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ **Zie bewijs p 101**
Bepaalde integraal en afgeleide (eig)	Als f : R → R continu is op een interval dat a en b bevat, dan geldt voor t tussen a en b • $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$ • $\frac{d}{dt}\int_t^b f(x)dx = -f(t)$ **Zie bewijs p 101**
Integratie door splitsing	Als f : R → R en g : R → R continu zijn op een interval dat a en b bevat en α,βЄR dan geldt $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ **zie bewijs p 102**
Integratie door substitutie	Als g : R → R afleidbaar is op een interval dat a en b bevat en f : R → R is continu op een interval dat g(a) en g(b) bevat, dan geldt $\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)d = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \; met \; u = g(x)$
Partiële integratie	Als f : R → R en g : R → R afleidbaar zijn op een interval dat a en b bevat, dan geldt $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]ab - \int_a^b g(x)f'(x)dx$
Oppervlakte-situatie 1	De oppervlakte met f : R → R^+ positief en continu op een interval dat a en b bevat, kan berekend worden als opp=$\int_a^b f(x)dx$
Oppervlakte-situatie 2	De oppervlakte met f : R → R continu op een interval dat a,b en c bevat, kan berekend worden als opp=$\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$
Oppervlakte-situatie 3	De oppervlakte met f : R → R en g : R → R continu op een interval dat a en b bevat, kan berekend worden als opp=$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$
Gebied opsplitsen	Soms moet een gebied opgesplitst worden in deelgebieden, zodat elk deelgebied tot een standaardintegraal herleid wordt.
Middelwaardestelling integral (eig)	Als f : R → R continu is op een interval dat a en b bevat, dan bestaat er minstens één punt c in het open interval]a,b[zodat $\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(c)$
Gemiddelde waarde van een functie	Als f: R → R continu is op een interval dat a en b bevat, dan wordt de gemiddelde waarde van f over het interval [a,b] gedefinieerd als $f[a,b] = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)dx$

over een interval	
Riemann-som	Als f : R → R continu is op een interval dat a en b bevat, als het interval [a,b] wordt verdeeld in n kleinere deelintervallen met breedte Δx=(b-a)/n, en als c1, c2,…, cn willekeurige punten zijn in elk van deze deelintervallen, dan noemt men $f(c1)\Delta x + f(c2)\Delta x + \cdots + f(cn)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(ci)$ een riemann-som voor de functie f op het interval [a,b].
Bepaalde integraal en Riemann-som (eig)	Als f : R → R continu is op een interval dat a en b bevat, als het interval [a,b] wordt verdeeld in n kleinere deelintervallen met breedte Δx=(b-a)/n, en als c1, c2,…,cn willekeurige puntn zijn in elk van deze deelintervallen, dan geldt $\int_a^b f(x)dx = \lim n \to \infty \sum i = 1n\, f(ci)\Delta x$
Rechthoeksregel	Beschouw een functie f : R → R die continu is op een interval dat a en b bevat. Verdeel het interval [a,b] in n deelintervallen met breedte Δx=(b-a)/n en noem de randpunten a=xo < x1<… <xn-1 <xn = b deze verdeling genereert verschillende benaderingen voor de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)dx$ • Linkerpunt-benadering BL= Δx. $\sum_{i=0}^{n-1} f(xi) = \Delta x. \sum\_(i = 1)\^(n) ▒ 〖f(xi - 1〗$ • Rechterpunt-benadering $BR = \Delta x.\ \sum_{i=1}^{n} f(xi)$ • Midpunt-benadering -$BM = \Delta x. \sum_{i=1}^{n} f(mi)\ met\ mi = \frac{xi-1+xi}{2}$
Rechthoeksregel (eig)	Indien de functie f : R → R stijgt over het hele interval [a,b], dan geldt BL $\leq \int_a^b f(x)dx \ \leq BR$, de linkerpunt-benadering bepaalt een ondergrens, de rechterpunt-benadering een bovengrens. Indien de functie f : R → R daalt over het hele interval [a,b], dan geldt BL$\geq \int_a^b f(x)dx \ \geq BR$, de linkerpunt-benadering bepaalt een bovengrens, de rechterpunt-benadering een ondergrens.
Oneigenlijke integraal	Als de functie f : R → R continu is op [a, +∞[, dan definieert men $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim M \to +\infty \int_a^M f(x)dx$ Als de functie f : R → R continu is op] -∞,b] dan definieert men $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim M \to +\infty \int_{-M}^{b} f(x)dx$ limiet bestaat en een eindige reële waarde geeft: convergent limiet bestaat maar is oneindig: divergent limiet bestaat niet:onbepaald
Regel	Let op! Wanneer beide integratiegrenzen oneindig zijn, dan met je de integraal opsplitsen. Enkel indien beide deelintegralen convergent zijn, is ook de hele integraal convergent.
Poisson-integraal	Er geldt $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}$

Functies van meerdere veranderlijken	
Assenstelsel	Rechts assenstelsel gedefinieerd in de ruimte, waarbij alle assen (X, Y, Z) loodrecht op elkaar staan. Van elk punt in de ruimte kennen we de drie coördinaten, wanneer we het punt projecteren op de drie assen. De drie assen bepalen twee per twee een coördinaatvlak en verdelen de ruimte in acht octanten. Het gebied waarin de drie coördinaten positief zijn, noemen we het eerste octant. speciale punten: • Punten op de coördinaatassen: (a,0,0) (0,b,0) (0,0,c) • Punten op de coördinaatvlakken: (a,b,0) (0,b,c) (a,0,c)
Functie	Een reële functie f met twee veranderlijken is een voorschrift dat aan elk element van een verzameling A ⊂ R x R (domein of definitiegebied) een element van een verzameling B ⊂ R (bereik of beeldgebied) toekent. Notatie: f: R x R→ R : (x,y) → f(x,y) of f: R^2→ R: (x,y) → f(x,y)
Onafhankelijke en afhankelijke veranderlijken	X en y zijn onafhankelijke veranderlijken Z is de afhankelijke veranderlijke
Éénwaardig/meer waardig	Eenwaardig: elk koppel(x,y) uit het definitiegebied stemt overeen met juist één waarde van de afhankelijke. Anders meerwaardig
Éénduidig/meerdui dig	Éénduidig: elke waarde van de afhankelijke veranderlijke stemt overeen met juist één koppen (x,y) uit het definitiegebied. Anders meerduidig
Impliciet	Men spreekt van een impliciete voorstelling van de functie f: R x R→ R, wanneer het voorschrift niet kan geëxpliciteerd worden naar de afhankelijke veranderlijke, maar impliciet bepaald wordt uit een verband F(x,y,z)=0
Expliciet	Men spreekt van een expliciete voorstelling van de functie f: R x R→ R, wanneer het voorschrift kan geëxpliciteerd worden naar de afhankelijke veranderlijke, maw z=f(x,y).
Oppervlakken en krommen	Reële functies van twee veranderlijken worden grafisch voorgesteld door een oppervlak in de ruimte. krommen = doorsnede van twee oppervlakken $\begin{cases} z=f_1(x,y) \\ z=f_2(x,y) \end{cases}$
Vlakken en rechten	Vlak: ax+by+cz+d=0 (a, b en c niet tegelijk nul) Rechte=doorsnede van twee vlakken $\begin{cases} A1x+b1y+c1z+d1 \text{ (niet tegelijk nul)} \\ A2x+b2y+c2z+d2 \text{ (niet tegelijk nul)} \end{cases}$ Speciale vergelijkingen • Vlakken evenwijdig met de coördinaatvlakken: (x=α), (y=β) (z=γ) • coördinaatassen
Vlakke doorsneden	Om inzicht te krijgen in de structuur van een oppervlak in de ruimte, is het zinvol te kijken naar doorsneden met vlakken evenwijdig met de coördinaatassen. • Doorsneden evenwijdig met XY-vlak=niveaukromme -z=f(x,y) -z=c • Doorsneden evenwijdig met XZ-vlak -z=f(x,y) -y=b • Doorsneden evenwijdig me YZ-vlak - z=f(x,y) -x=a
Contour	Voor een reële functie f met twee veranderlijken f : R^2 → R : (x,y) → f(x,y) definieert men een contour of contourlijn als de verzameling van alle punten in

	het XY-vlak met eenzelfde beeldwaarde, of $C_f(\alpha)=\{(x,y) \in R^2 \mid f(x,y) = \alpha\}$
Contour-plot	Is een grafische voorstelling van verschillende contourlijnen tegelijkertijd. (grijstinten) p138
Functies van n veranderlijken	Een reële functie f van n veranderlijken is een voorschrift dat aan elk element van een verzameling A c R^n= {(x1,x2,…,xn);x1 Є R en x2Є R en … en xn ЄR} (domein of definitiegebied: verzameling van n-tupels) een element van een verzameling B c R (bereik of beeldgebied) toekent.
Partiële afgeleiden	
Partiële afgeleiden	De partiële afgeleide naar x van de functie $f : R^2 \to R : (x, y) \to f(x, y)$ in een punt (x_0, y_0) wordt gedefinieerd door: $f'_x (x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)- f(x_0,y_0)}{h}$ De partiële afgeleide naar y van de functie $f : R^2 \to R : (x, y) \to f(x, y)$ in een punt (x_0, y_0) wordt gedefinieerd door: $f'_y (x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)- f(x_0,y_0)}{h}$ Beide partiële afgeleiden kunnen we terug als functies definiëren, waarvoor we de notaties $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ of $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ gebruiken. we gaan na hoe de functiewaarde verandert wanneer we één veranderlijke wijzigen. We beschouwen de andere veranderlijke als een constante. Een functie is partieel afleidbaar wanneer alle partiële afgeleiden ervan bestaan.
Betekenis partiële afgeleide	De partiële afgeleide van een functie f naar x berekend in het punt (x_0, y_0), is gelijk aan de helling van de raaklijn aan de (vlakke) doorsnede van het oppervlak met het vlak $y = y_0$ in het punt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: • Vlakke doorsnede: $\begin{cases} z = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$ • Helling: $f'_x (x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)- f(x_0,y_0)}{h}$ De partiële afgeleide van een functie f naar y berekend in het punt (x_0, y_0), is gelijk aan de helling van de raaklijn aan de (vlakke) doorsnede van het oppervlak met het val $x = x_0$ in het punt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$: • Vlakke doorsnede: $\begin{cases} z = f(x_0, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ • Helling: $f'_y (x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)- f(x_0,y_0)}{h}$ Vaststellingen: • $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) > 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak $y = y_0$ in het punt P stijgend • $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) < 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak $y = y_0$ in het punt P dalend • $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak $x = x_0$ in het punt P stijgend • $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak $x = x_0$ in het punt P dalend
Hogere orde partiële afgeleiden	De tweede orde partiële afgeleiden van een functie $f : R^2 \to R : (x,y) \to f(x,y)$ worden gedefinieerd als: $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial f}{\partial x})$

	$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\,(\frac{\partial f}{\partial y})$ Vaststellingen: • $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(x0,y0)>0: doorsnede van het oppervlak met het vlak y=y0 in het punt P convex • $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$(x0,y0)<0: doorsnede van het oppervlak met het vlak y=y0 in het punt P concaaf • $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x0, y0) > 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak x=x0 in het punt P convex • $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x0, y0) < 0$: doorsnede van het oppervlak met het vlak x=x0 in het punt P concaaf Zie ook partiële afgeleiden voor functie van n veranderlijken
Stelling van Young of stelling van Clairaut	Beschouw een functie f : $R^2 \to R$: (x,y) → f(x,y) waarvoor de beide gemengde partiële afgeleiden f''_{xy} en f''_{yx} continu zijn in een gebied $G \subset R^2$. dan geldt op dit gebied G dat $f''_{xy} = f''_{yx}$
Homogene functie	Een reële functie f : $R^2 \to R$: (x,y) → f(x,y) is een homogene functie van graad m, indien voor elk paar (x,y) uit het domein en voor willekeurige $t \in R^+_0$ geldt: $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$. Opmerking: De graad m hoeft niet noodzakelijk geheel of positief te zijn. Speciale situaties zijn homogene functies met graad 1 en graad 0.
Homogene functies (eig)	Indien de functie f : $R^2 \to R$ homogeen is van graad m, en indien de partiële afgeleiden bestaan, dan geldt voor de partiële afgeleiden van eerste orde: • De functies $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ zijn ook homogene functie van graad m -1 • $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv m(fx, y)$ stelling/**identiteit van Euler**
N – dimensies	P 164
Totale differentiaal	Voor een partieel afleidbare functie met voorschrift z = f(x,y) wordt de totale differentiaal in een punt (x_0, y_0) gedefinieerd als $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy = d_xf(x_0,y_0) + d_yf(x_0,y_0)$. Verkorte notatie: $dz = f'_x dx + f'_y dy$
Impliciet afleiden	Wanneer de vergelijking van een functie gegeven is in een impliciete vorm F(x,y) = 0, dan kan de afgeleide van y naar x, of van de (onbekende) expliciete vorm y = f(x) als volgt gevonden worden: • Leid beide leden af naar x • Groepeer de termen met y’ en de termen zonder y’ • Los op naar y’ Vbn p 78 en 79
Impliciete functie stelling F(x,y) = 0	Wanneer de vergelijking van een functie met één onafhankelijke veranderlijke gegeven is in een impliciete vorm F(x,y) = 0, dan kan de afgeleide voor de (onbekende) expliciete vorm y = f(x) in een punt x_0 gevonden worden als: $f'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ met y_0 bepaald door $F(x_0,y_0)=0$ voor zover de functie f gedefinieerd is en de partiële afgeleide in de noemer verschilt van nul.
Bewijs p 155	F(x,y) = 0 ↓

	dF(x,y)=0 ↓ $F'_x dx + F'_y dy = 0$ ↓ $F'_y dy = -F'_x dx$ ↓ Y'=$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$
Impliciete functie stelling F(x,y,z) = 0	Wanneer de vergelijking van een functie met twee onafhankelijke veranderlijken gegeven is in een impliciete vorm F(x,y,z) = 0, dan kan de afgeleide voor de (onbekende) expliciete vorm z = f(x,y) in een punt (x_0,$y_à$) gevonden worden als: $f'_x(x_0,y_0) = \frac{-F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}$ en $f'_y(x_0,y_0) = \frac{-F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}$ met z_0 bepaald door F(x_0,y_0,z_0)=0 voor zover de functie f gedefinieerd is en de partiële afgeleide in de noemer verschilt van nul.
Bewijs p 156	F(x,y,z) = 0 ↓ dF(x,y,z)=0 ↓ $F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$ ↓ $F'_z dz = -F'_x dx - F'_y dy$ ↓ $dz = -\frac{F'_x}{F'_z} dx - \frac{F'_y}{F'_z} dy$ ↓ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$
Raaklijn expliciet voorschrift	Beschouw een afleidbare functie f en een punt P= (x0,y0) op de curve van f. de vergelijking van de raaklijn aan de curve in het punt P luidt: y-y0=f '(xo)(x-x0) met y0=f(x0)
Raaklijn impliciet voorschrift	De vergelijking van de raaklijn in het punt P = (x_0,y_0) aan de curve met impliciete vergelijking F(x,y)=0 luidt $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$
Bewijs	$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ↓ $f'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$ (impliciete functie stelling) ↓ $(y - y_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$ ↓ $F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = -F'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$
Raakvlak expliciet voorschrift	Beschouw een afleidbare functie f en een punt P = (x_0,y_0,z_0) op het oppervlak met vergelijking z=f(x,y). De vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak in het punt P luit: z – z0= $f'_x(x_0, y_0)$ (x-x_0) +$f'_y(x_0,y_0)$ (y-y_0) met z0=f(x0,y0).
Lineaire benadering	De beeldwaarde op het raakvlak kan gebruikt worden al benadering voor de werkelijke functiewaarde, of voor (x,y) in de buurt van (x_0,y_0): f(x,y)≈ f(x_0,y_0) + $f'_x(x_0, y_0)$ (x-x_0) +$f'_y(x_0,y_0)$ (y-y_0). Men noemt dit een lineaire benadering of benadering van eerste orde.
Raakvlak impliciet voorschrift	De vergelijking van het raakvlak in het punt P = (x_0,y_0,z_0) aan het oppervlak met impliciete vergelijking F(x,y,z)=0 luidt $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y -$ y0+ Fz′(x0,y0,z0)(z−z0)=0

Bewijs	$(z - z_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ met z0=f(x0,y0) ↓ $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{-F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$ en $f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{-F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$ ↓ $(z - z_0) = \dfrac{-F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \dfrac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$ ↓ $F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = -F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) - F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$
Extremum-onderzoek	
Lokale extrema	Een functie f : $R^2 \to R$ bereikt een lokaal maximum in het punt (x_0,y_0), indien voor elk punt (x,y) in de buurt van het punt (x_0,y_0) geldt dat f(x,y)≤f(x_0,y_0) Een functie f : $R^2 \to R$ bereikt een lokaal minimum in het punt (x_0,y_0), indien voor elk punt (x,y) in de buurt van het punt (x_0,y_0) geldt dat f(x,y)≥f(x_0,y_0)
Lokale extrema eerst orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie f : $R^2 \to R$ kan enkel ene lokaal extremum bereiken in het punt (x_0,y_0) als dit punt een stationair of kritisch punt is, ie $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ Extremum bij paraboloïde: minimum Extremum bij zadeloppervlak: zadelpunt
Gebonden extremum-probleem	Bij een gebonden extremum-probleem zoeken we de extrema van een functie f : $R^2 \to R$: (x,y) ➞ f(x,y) onder een voorwaarden (nevenvoorwaarde) g(x,y)=C. De functie f noemen we de doelfunctie, alle punten (x,y) die voldoen aan de nevenvoorwaarde worden toegelaten punten of bruikbare punten genoemd. We zoeken niet naar een gewoon maximum of minimum, maar we zoeken onder alle toegelaten punten die punten waar f in vergelijking met de functiewaarde in andere toegelaten punten een maximum of minimum bereikt. We spreken dan van een gebonden maximum of minimum. Substitutiemethode: wanneer de nevenvoorwaarde geëxpliciteerd kan worden naar één van de veranderijken, dan kunnen we het gebonden extremum-probleem met twee veranderlijken en 1 voorwaarde herleiden naar een gewoon extremum-probleem met 1 veranderlijke. De tweede veranderlijke kan dan achteraf makkelijk berekend worden aan de hand van het verband tussen beide.
lagrangefunctie	Voor het bepalen van de extrema van een functie f : $R^2 \to R$ onder de voorwaarde g(x,y)=C, wordt de Lagrange-functie gedefinieerd als L(x,y,λ) = f(x,y) - λ(g(x,y)-C). De variabele λ noemt men de Lagrange-multiplicator.
Gebonden extrema eerst orde voorwaarde	Een partieel afleidbare functie f : $R^2 \to R$ kan enkel een extremum bereiken in het punt (x_0,y_0) onder de voorwaarde g(x,y)=C met g een partieel afleidbare functie, als dit punt deel uitmaakt van een stationair punt voor de lagrange-functie, i.e. als er een waarde λ_0 bestaat waarvoor: $\begin{cases} L'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \to f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0)' = 0 \\ L'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \to f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0)' = 0 \\ L'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \to g(x_0, y_0) = C \end{cases}$ Uitwerking p 185
Betekenis Lagrange multiplicator	Beschouw partieel afleidbare functies f en g en een optimaal punt (x_0,y_0,λ_0) met functiewaarde f_0 = f(x_0,y_0) voor het gebonden extremum-probleem: bepaal de extrema van f onder de voorwaarde g(x,y)=C. als de waarde van C varieert, dan hangt ook het optimum af van C, of x_0= x_0(C), y_0=y_0(C) en f_0 = f_0(C) = f(x_0(C), y_0(C)). Er geldt $\lambda_0 = \frac{df_0}{dC}(C)$. BELANGRIJK:

	Deze eigenschap zegt maw dat de waarde van de Lagrange-multiplicator overeenstemt met de helling van f indien bekeken als functie van C. OF je kan de lagrange-multiplicator interpreteren als de ogenblikkelijke aangroei van de doelfunctie in het optimum indien de waarde C in de nevenvoorwaarde met één eenheid wordt verhoogd.

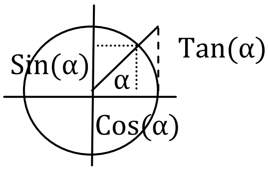
Functies

Grondformule goniometrische functies

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

α	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
Sin(α)	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0
Cos(α)	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1
Tan(α)	0	√3/3	1	√3	/	0



Exponenten

$a^x * a^y = a^{x+y}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^{x^y} = a^{x*y}$

MAAR

$a^x + a^y = a^z \neq x + y = z$

$a^x - a^y = a^z \neq x - y = z$

Logaritmische functies

Voor $a \in R^+ \backslash \{0,1\}$ en $x,y,z \in R^+_0$ geldt :

$\text{Log}_a(x*y*z) = \log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z)$

$\text{Log}_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\text{Log}_a(x^y) = y * \log_a(x)$

MAAR

$\text{Log}_a(x) + \log_a(y) = \log_a(z) \neq x + y = z$

$\text{Log}_a(x) - \log_a(y) = \log_a(z) \neq x - y = z$

$A^{\log_a(x)} = x$

$\text{Log}_a(a^y) = y$

Limieten

Limieten berekenen

1. invullen
2. Veeltermbreuk →±∞ → enkel hoogstegraadstermen
3. Breuk met wortelvormen →±∞ →zelfde macht van x vooraan in teller en noemer
4. voorlopig onbepaald geval 0/0 of ∞/∞ → l'hôpital
5. VOG 0*∞ of ∞-∞ → herschrijven

Asymptoten berekenen

Horizontale asymptoten y=b

De vergelijking van eventuele horizontale asymptoten van een functie kan als volgt gevonden worden:

- Definitie en berekening: een reële functie f heeft een horizontale asymptoot y=b voor negatieve waarden als $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$ of voor positieve waarden als $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$
- Praktisch: bereken de limietwaarden van de functie wanneer x naar ±∞ beweegt; vind je een eindige waarde, dan heeft de functie een horizontale asymptoot.
- NOOIT horizontale en schuine asymptoot

Verticale asymptoot x=a

	De vergelijking van eventuele verticale asymptoten van een functie kan als volgt gevonden worden: • <u>Definitie en berekening</u>: een reële functie f heeft een verticale asymptoot x = a als $lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. • <u>Praktisch</u>: bij rationale functies komen verticale asymptoten voor bij de nulpunten van de noemer die geen nulpunt van de teller zijn. **Schuine asymptoot** y=mx+q De vergelijking van eventuele schuine asymptoten van een functie kan als volgt gevonden worden: • <u>Definitie en berekening:</u> een reële functie f heeft een schuine asymptoot y=mx+q voor negatieve waarden als $lim_{x \to -\infty} f(x)/x = m$ en $lim_{x \to -\infty}(f(x) - mx) = q$ of voor positieve waarden als $lim_{x \to +\infty} f(x)/x = m$ en $lim x \to +\infty (fx - mx) = q$ met m ∈ R_0 en q ∈ R • <u>Praktisch:</u> bereken de vermelde limietwaarden. Vind je een eindige waarde, dan heeft de functie een schuine asymptoot. Vind je m=0, dan gaat het eigenlijk om een horizontale asymptoot.

Afgeleiden

Basisafgeleiden	$\frac{d}{dx}$ (ax+b) = a, met a, b ∈ R $\frac{d}{dx}$ (x^n) = nx^{n-1}, met n ∈ R_0 $\frac{d}{dx}$(√x) =1/(2√x), voor x ≠ 0 $\frac{d}{dx}$ (1/x) = -1/x^2, voor x ≠ 0 $\frac{d}{dx}$ (sinx) = cos x $\frac{d}{dx}$(cosx)= -sinx $\frac{d}{dx}$ (tanx) = 1/($\cos^2$x) $\frac{d}{dx}$ (Bgsinx) = 1/(√1-x^2) $\frac{d}{dx}$ (Bgcosx) = -1/(√1-x^2) $\frac{d}{dx}$ (Bgtanx) = 1/1+x^2 $\frac{d}{dx}$ (e^x) = e^x $\frac{d}{dx}$(a^x) = a^xlna, met a ∈ R^+\{0,1} $\frac{d}{dx}$ (lnx)=1/x $\frac{d}{dx}$ ($\log_a$x)= 1/(xlna), met a ∈ R^+\{0,1}
Som, verschil, product en quotiënt	$\frac{d}{dx}$ (af(x))= af'(x), met a ∈ R $\frac{d}{dx}$ (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x) $\frac{d}{dx}$ (f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x) $\frac{d}{dx}$ (f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) $\frac{d}{dx}$ (1/f(x)) = -f'(x)/f(x)^2, indien f(x) ≠ 0 $\frac{d}{dx}$ (f(x)/g(x)) = (g(x)f'(x)) – (f(x)g'(x))/g(x)^2, indien g(x) ≠ 0

Economische functies	
Productiefunctie	$P : R^+ \rightarrow R^+ : A \rightarrow q=P(A)$
Cobb Douglas	$P(A)=\gamma A^\alpha$ waarbij $\gamma > 0$ en $0<\alpha<1$
Vraagfunctie	$D : R^+ \rightarrow R^+ : p \rightarrow q=D(p)$ of $F = D^{-1} : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow p=F(q)$
Lineair model	$p = F(q) = D^{-1}(q) = p_0 - mq$ $(q \leq p_0/m)$ of $q = D(p) = (p_0 - p)/ m$ $(p \leq p_0)$ waarbij $p_0 > 0$ en $m > 0$
Opbrengsten - functie	zuivere concurrentie $R : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow R(q) = pq$ monopolie $R : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow R(q) = F(q)q$
Vervolg lineair model	Voor monopoliesituatie $R(q) = (p_0 - mq)\, q = -mq^2 + p_0 q$ waarbij $p_0 > 0$ en $m > 0$ top $(p_0/2m, p_0^2/4m)$
Kostenfunctie	$: R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow K = K(q)$
Kwadratisch model	$K(q) = aq^2 + bq + c$ waarbij $a, b, c > 0$ top $(-b/2a, c-b^2/4a)$ snijdt de verticale as in het punt $(0, c)$ de vaste kosten bedragen c.
Winstfunctie	$W : R^+ \rightarrow R : q \rightarrow W = R(q) - K(q)$
Vervolg voorgaande modellen	$W = R(q) - K(q) = (-mq^2 + p_0 q) - (aq^2 + bq + c)$ waarbij $p_0, m, a, b, c > 0$.
Groei – en vervalfunctie	$y = a^x = e^{rx}$ mer $r = \ln a$ $y = a^x = e^{-rx}$ mer $r = -\ln a$
Evolutie van populaties	$P(t) = P_0 e^{\alpha t}$ met P_0 de grootte van de populatie op tijdstip 0 en met α de groeivoet van de populatie.

Economische functies	
Gemiddelde en marginale functie	Voor een economische functie f : $R^+ \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$ geldt: • De gemiddelde waarde voor f is de functie $\langle f \rangle : R^+ \rightarrow R : x \rightarrow \langle f \rangle (x) = \frac{f(x)}{x}$ • De marginale waarde voor f is de functie f' : $R^+ \rightarrow R : x \rightarrow f'(x)=\frac{df}{dx}(x)$
Gemiddelde en marginale functie	De gemiddelde en marginale waarde van een economische functie f : $R^+ \rightarrow R$ in een punt van het domein hebben een eenvoudige meetkundige betekenis. • Gemiddelde waarde $\langle f \rangle$ berekend in $x=x_0$ is de helling van de voerstraal (rico rechte door (0,0) en tot het punt $(x_0,f(x_0))$) • De marginale waarde f' berekend in $x=x_0$ is de helling van de raaklijn aan de curve van f in het punt $(x_0, f(x_0))$
Gemiddelde vs marginale waarde	Beschouw een afleidbare economische functie f : $R^+ \rightarrow R$. • Waar de gemiddelde functie stijgt, ligt de curve van de marginale functie boven die van de gemiddelde functie. • Waar de gemiddelde functie daalt, ligt de curve van de marginale functie onder die van de gemiddelde functie. • Waar de gemiddelde functie een lokaal extremum bereikt, vallen gemiddelde en marginale waarden samen.
Bewijs	Als we de afgeleide van de gemiddelde functie berekenen, dan vinden we: $\frac{d}{dx}\left(\langle f\rangle(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{xf((x) - f(x)}{x^2}$ Omdat de noemer enkel een kwadraat bevat, wordt het teken van de breuk bepaalt door de teller. Er geldt: • Als de gemiddelde functie stijgt, dan is $\frac{d}{dx}\left(\langle f\rangle(x)\right) \geq 0$. Hieruit volgt dat $x.f'(x) \geq f(x)$ of $f'(x) \geq f(x)/x$ • Als de gemiddelde functie daalt, dan is $\frac{d}{dx}\left(\langle f\rangle(x)\right) \leq 0$. Hieruit volgt dat $x.f'(x) \leq f(x)$ of $f'(x) \leq f(x)/x$ • Als de gemiddelde functie een lokaal extremum bereikt, dan is $\frac{d}{dx}\left(\langle f\rangle(x)\right) = 0$. Hieruit volgt dat $x.f'(x) = f(x)$ of $f'(x) = f(x)/x$
Productiefunctie	Een productiefunctie P : $R^+ \rightarrow R^+ : A \rightarrow q=P(A)$ geeft aan hoe de arbeid de grootte van de productie bepaalt. De inverse functie kan gebruikt worden om te berekenen welke hoeveelheid arbeid er nodig is om een bepaalde productiegrootte te bereiken. Kenmerken: • $A = 0 \rightarrow P = 0$ • A stijgt → P stijgt (bij lage input sneller en dan vertragen) • In een beperkt aantal gevallen treedt een verzadigingspunt op: afname van de efficiëntie zorgt ervoor dat de P daalt als A stijgt.
Gemiddelde en marginale productie	Het gemiddelde product is het product per eenheid van arbeid, of $\langle P \rangle : R^+ \rightarrow: R^+ : A \rightarrow \frac{P(A)}{(A)}$ Het marginale product is de ogenblikkelijke aangroei van het product bij een toename van de arbeid (met één eenheid, zie toepassing eig2.7 p59), of P' : $R^+ \rightarrow R : A \rightarrow \frac{dP}{dA}(A)$

Kenmerken	• Als arbeid=0, dan productie =0 • Naarmate hoeveel arbeid stijgt, neemt ook de productie toe. Bij lage input sneller, daarna trager, eerst convex (P ''>0), dan concaaf (P ''<0) • Wnr P '(A_2) = ≺P≻(A_2), dan loopt de raaklijn door de oorsprong. Voor A-waarden kleiner dan A_2 is de helling van de raaklijn aan de curve groter dan de helling van de voorstraal. Marginale prod is groter dan gem prod. En andersom • Verzadigingspunt: omwille van een afname van efficiëntie zal de productie afnemen als de hoeveelheid van arbeid nog toeneemt. Voor het verzadigingspunt is marg product positief, erna negatief.
Cobb Douglas	$P(A)=\gamma A^{\alpha}$ waarbij $\gamma > 0$ en $0<\alpha<1$
Cobb Douglas model	Gemiddeld product: $\langle P \rangle\,(A) = \frac{\gamma A^{\alpha}}{A} = \gamma A^{\alpha-1} = \frac{\gamma}{A^{\alpha-1}}$ Marginaal product: $P'(A) = \frac{d}{dA}(\gamma A^{\alpha}) = \gamma\alpha A^{\alpha-1} = \frac{\gamma\alpha}{A^{1-\alpha}}$ • Het marginaal product is gelijk aan het gemiddeld product op een factor α na: het marginaal product is dus steeds kleiner dan het gemiddelde product. • Wanneer de arbeid naar 0 nadert, worden gemiddeld en marginaal product oneindig groot; wanneer de arbeid oneindig groot wordt, worden gemiddeld en marginaal product 0.
Vraagfunctie	Een vraagfunctie $D : R^+ \rightarrow R^+ : p \rightarrow q=D(p)$ of $F = D^{-1} : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow p=F(q)$ geeft voor een individuele consument het verband tussen de aangeboden hoeveelheid en de vraagprijs van een goed. De functies D en F zijn inverse functies. De functie D geeft voor elke mogelijke prijs aan hoeveel de consument wenst te consumeren. De functie $F = D^{-1}$ geeft aan tegen welke prijs de consument een bepaalde hoeveelheid wil consumeren. Kenmerken: • V stijgt → p daalt • p stijgt → V daalt
Lineair model	$p = F(q) = D^{-1}(q) = p_0 - mq$ $(q \leq p_0/m)$ of $q = D(p) = (p_0 - p)/ m$ $(p \leq p_0)$ waarbij $p_0 > 0$ en $m > 0$ Voor $0 \leq q \leq p_0/m$ beschrijft de functie F een rechte door de punten $(0, p_0)$ en $(p_0/m, 0)$
Opbrengsten -functie	Een opbrengstenfunctie geeft aan hoe groot de totale opbrengst is bij een bepaalde productiegrootte. Bij zuivere concurrentie is de prijs gegeven, en krijgen we: $R : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow R(q) = pq$ Bij een monopolie is de prijs veranderlijk, en krijgen we: $R : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow R(q) = F(q)q$ Kenmerken bij een monopolie: • aangeboden hoeveelheid = 0 → opbrengst = 0 • bij kleine hoeveelheden zal de totale opbrengst stijgen indien de aangeboden hoeveelheid wordt verhoogd, de marginale opbrengst is dan positief • bij grote hoeveelheden zal de totale opbrengst dalen indien de aangeboden hoeveelheid nog wordt verhoogd, de marginale opbrengst is negatief Zie opbrengstmaximalisatie p66 Opbrengst aflezen van de grafiek: R(q) = pq komt voor elke punt (p,q) van de vraagcurve overeen met de oppervlakte van de rechthoek tussen de oorsprong en dit punt (p,q).
Gemiddelde en	De gemiddelde opbrengst is de opbrengst per productie-eenheid, of

marginale opbrengstfunctie	$\langle R \rangle : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow \frac{R(q)}{(q)}$ De marginale opbrengst is de ogenblikkelijke aangroei van de opbrengst bij een toename van de productiegrootte, of $R' : R^+ \rightarrow R : q \rightarrow \frac{dR}{dq}(q)$ De aard van de functies is verschillend voor een zuivere concurrentiesituatie en een monopoliesituatie
Zuivere concurrentie	Bij zuivere concurrentie is de prijs gegeven, en krijgen we voor de • Gemiddelde opbrengst: $\langle R \rangle (q) = \frac{R(q)}{(q)} = \frac{pq}{q} = p$ • Marginale opbrengst: $R'(q) = \frac{d}{dq}(pq) = p$ Zowel de gemiddelde als de marginale opbrengst zijn gelijk aan de gegeven eenheidsprijs.
Monopolie	Bij een monopolie is de prijs veranderlijk, en krijgen we voor de • Gemiddelde opbrengst: $\langle R \rangle (q) = \frac{R(q)}{(q)} = \frac{F(q)q}{q} = F(q)$ • Marginale opbrengst: $R'(q) = \frac{d}{dq}(F(q)q) = F(q) + qF'(q)$ Enkel de gemiddelde opbrengst is nu gelijk aan de (veranderlijke) eenheidsprijs. Bij een dalende vraagfunctie is $F'(q) < 0$ zodat de marginale opbrengst kleiner zal zijn dan de gemiddelde opbrengst.
Opbrengst bij lineaire vraag	Voor monopoliesituatie Voor $0 \leq q \leq p_0/m$ luidt het functievoorschrift : $R(q) = (p_0 - mq)\, q = -mq^2 + p_0 q$ waarbij $p_0 > 0$ en $m > 0$ cfr: ax^2+bx+c $(c=0)$ Dit is een deel van de parabool met top $(p_0/2m, p_0^2/4m)$
Kostenfunctie	Bij gegeven inputprijzen geeft een kostenfunctie $K : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow K = K(q)$ aan hoe groot de totale kosten zijn bij elke productiegrootte. Kenmerken: • productiegrootte = 0 → is er nog de vaste kost • productiehoeveelheid stijgt → stijgen totale kosten, marginale kost= positief • productie-interval: kosten stijgen minder snel oa omwille van efficiëntie zie kostenminimalisatie p 69
Gemiddelde en marginale kosten	De gemiddelde kost is de kost per productie-eenheid, of $\langle K \rangle : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow \frac{K(q)}{(q)}$ De marginale kost is de ogenblikkelijke aangroei van de kost bij een toename van de productiegrootte , of $K' : R^+ \rightarrow R^+ : q \rightarrow \frac{dK}{dq}(q)$
Kwadratisch model	$K(q) = aq^2 + bq + c$ waarbij $a, b, c > 0$ en $q \geq 0$ Dit is een parabool met top $\left(-\frac{b}{2a}, c - \left(\frac{b^2}{4a}\right)\right)$ Deze parabool snijdt de verticale as in het punt (0, c) de vaste kosten bedragen c.
Kwadratisch model	Voor een kwadratische kostenfunctie $K(q)=aq^2+bq+c$ met $a, b, c > 0$ kunnen we de • Gemiddelde kost vinden als: $\langle K \rangle (q) = \frac{aq^2+bq+c}{q} = aq + b + \frac{c}{q}$. Verticale asymptoot q=0 en schuine asymptoot $\langle K \rangle = aq + b$ • Marginale kost berekenen: $K'^{(q)} = \frac{d}{dq}(aq^2 + bq + c) = 2aq + b$. Dit is een stijgende rechte die de verticale as snijdt in het punt (0,b).

	Het snijpunt vinden we uit $\langle K \rangle (q) = K'(q)$ of $aq + b + \frac{c}{q} = 2aq + b$ of $\frac{c}{q} = aq$, waaruit $q = \sqrt{(c/a)}$.
Winstfunctie	Een winstfunctie $W : R^+ \to R : q \to W = R(q) - K(q)$ geeft aan hoe groot de totale winst is bij een bepaalde productiegrootte. Kenmerken: • aangeboden hoeveelheid zeer klein en vaste kosten $\neq 0$ → totale winst negatief. (FK > TO) • te grote hoeveelheid → winst negatief (daling opbrengsten + stijging kosten) • TO > TK → winst (eerst stijgen, dan dalen) Zie winstmaximalisatie p73
Vervolg voorgaande modellen	Obv lineair en kwadratisch model: $W = R(q) - K(q) = (-mq^2 + p_0q) - (aq^2 + bq + c) = -(m+a)q^2 + (p_0-b)q - c$ $q_0 \leq p/m$ waarbij $p_0, m, a, b, c > 0$. Dit is een parabool met 2 break-even punten.
Winstmaximalisatie – monopolieprobleem	Monopolist wil voor een bepaald goed zijn prijs bepalen door winstmaximalisatie. Winstfunctie: $W : R^+ \to R : q \to W = R(q) - K(q)$ Bij monopolie: $p = F(q)$ zodat $R(q) = qF(q)$ Veronderstel dat beide functies afleid baar zijn: • Eerste orde voorwaarde: winstfunctie enkel extremum in q_0 als dit een stationair punt is. MAW $\frac{dW(q_0)}{dq} = 0$ of $\frac{dR(q_0)}{dq} - \frac{dK(q_0)}{dq} = 0$ of marginale kost = marginale opbrengst. Grafisch wil dit zeggen dat in het punt q_0 de raaklijnen aan de opbrengstfunctie en kostenfunctie evenwijdig moeten zijn • Tweede orde voorwaarde: winstfunctie enkele maximum in q_0 als $\frac{d^2W(q_0)}{dq^2} < 0$ of $\frac{d^2R(q_0)}{dq} - \frac{d^2K(q_0)}{dq} < 0$ of de helling van de marginale opbrengsten voor $q_0 <$ de helling voor de marginale kosten in q_0. Grafisch wil dit zeggen dat wanneer de opbrengsten functie concaaf is, de kostenfunctie convex is. P 119 Opmerking: De productiegrootte waarvoor de winst maximaal wordt, is meestal niet dezelfde als die waarvoor de opbrengst maximaal is. deze twee optimalisatieproblemen zijn verschillend! Vb p 120
Totale functie uit marginale functie (eig)	Als de continue functie $f : R^+ \to R$ de marginale functie geeft van een economische functie F en als F_0 de waarde is van deze onderliggende economische fucntie voor een inputwaarde gelijk aan nul dan kan de economische functie F teruggevonden worden als $F(x) = F0 + \int_0^x f(t)dt \textit{ voor elke inputwaarde } x > 0$
Consumenten- en producentensurplus	Als de vraagfunctie gegeven wordt door $F : R^+ \to R^+ : q \to p=F(q)$ en de aanbodsfunctie G: R --< R : $q \to p=G(q)$ en als het evenwicht wordt bereikt in het punt (q^*,p^*), dan geldt: • Consumentensurplus= $\int_0^{q*}(F(q) - p*)dq$ • Producentensurplus= $\int_0^{q*}\big(p* - G(q)\big)dq$
Productiefunctie	Een productiefunctie $P : R^+ \times R^+ \to R^+ : (A,K) \to q = p(A,K)$ geeft aan hoe de arbeid en het kapitaal de grootte van de productie bepalen. Bij doorsnede evenwijdig met… zien we….:

	• Aq : evolutie van de productie bij een vaste waarde van K • Kq: evolutie van de productie bij en vaste waarde van A • AK: isoproduct-curve of isokwant: constante productie.
Vraagfunctie situatie 1	Een vraagfunctie D : $R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (p,I) \rightarrow q = D(p,I)$ geeft aan hoe de vraag van een consument naar een product bepaalt wordt door de prijs en door zijn inkomen. Bij doorsnede evenwijdig met… zien we…: • Pq: evolutie van de vraag bij een vaste waarde van het inkomen I • Iq: evolutie van de vraag bij een vaste prijs p • AK (grondvlak): isokwanten, bevat alle combinaties van arbeid en kapitaal die eenzelfde productie opleveren
Vraagfunctie situatie 2	Een vraagfunctie $D_1 : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (p_1,p_2) \rightarrow q_1 = D(p_1,p_2)$ en $D_2 : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (p_1,p_2) \rightarrow q_2 = D(p_1,p_2)$ geeft aan hoe de vraag van een consument naar twee producten bepaalt wordt door de prijzen van beide producten. Bij doorsnede evenwijdig met… zien we…: • P_1q_1: evolutie van de vraag naar het eerste goed ifvd prijs voor het eerste groed, wanneer we de prijs van het tweede goed vasthouden • P_2q_1: evolutie van de vraag naar het eerste goed ifvd prijs voor het tweede goed, wanneer we de prijs van het eerst goed zelf vasthouden. • Competitieve goederen: curven zullen stijgend zijn. • Complementaire goederen: curven zullen dalend zijn.
Kostenfunctie	Bij gegeven inputprijzen geeft een kostenfunctie K : $R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (q_1,q_2) \rightarrow K = K(q_1,q_2)$ aan hoe groot de totale kosten zijn bij bepaalde productiegrootten. Bij doorsnede evenwijdig met… zien we…: • Q_2K: evolutie van de kosten bij een vaste waarde van q_1 • Q_1K: evolutie van de kosten bij een vaste waarde van q_1 • Q_1q_2: niveaukrommen
Nutsfunctie	Een nutsfunctie U : $R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (q_1,q_2) \rightarrow U = U(q_1,q_2)$ geeft het nut weer dat een consument toekent aan bepaalde combinaties van hoeveelheden van goederen. Indifferentiecurven: omvat alle combinaties van goederen die voor een bepaalde consument eenzelfde nut opleveren
Gemiddelde functie	Voor een economische functie f : $R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow f(x,y)$ geldt: • De gemiddelde waarde voor f naar de veranderlijke x is de functie $\langle f\rangle_x : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow \langle f\rangle_x(x,y) = \frac{f(x,y)}{x}$ • De gemiddelde waarde voor f naar de veranderlijke y is de functie $\langle f\rangle_y : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow \langle f\rangle_y(x,y) = \frac{f(x,y)}{y}$
Marginale functie	Voor een economische functie f : $R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow f(x,y)$ geldt: • De marginale waarde voor f naar de veranderlijke x is de functie $f'_x : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ • De marginale waarde voor f naar de veranderlijke y is de functie $f'_y : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (x,y) \rightarrow f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
Gemiddelde productiefunctie	Het gemiddelde product naar de arbeid is het product per eenheid van arbeid of $\langle P\rangle_A : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (A,K) \rightarrow \frac{P(A,K)}{A}$ Het gemiddelde product naar het kapitaal is het product per eenheid van

	kapitaal of $\langle P \rangle_K : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+ : (A, K) \rightarrow \frac{P(A,K)}{K}$
Marginale productiefunctie	Het marginale product naar de arbeid is de ogenblikkelijke relatieve aangroei van de productie bij een toename van arbeid of $P'_A : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (A, K) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial A}(A, K)$ Het marginale product naar het kapitaal is de ogenblikkelijke aangroei van het product bij een toename van $P'_K : R^+ \times R^+ \rightarrow R : (A, K) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial K}(A, K)$
Cobb Douglas	P159-160
Homogene economische functies	P163
Marginale substitutieverhouding	P169